

# 2018 年度数学特別セミナー

## 結び目理論の圏論化

(Categorification of a knot theory)

述: 伊藤 昇<sup>\*</sup> / 記: 穂坂 秀昭<sup>†</sup>

2020 年 3 月

### 概要

開成学園では毎年 1 回, 現役の数学者に講演していただく「数学特別セミナー」を開催しています. 2018 年度は, 東京大学大学院数理科学研究科の伊藤昇先生をお招きし, 「結び目理論の圏論化」というテーマでセミナーをしていただきました. このノートは, その講演の内容をまとめたものです.

なお, 脚注はいずれも穂坂が付け足したものです. 伊藤先生にお話していただいた内容は全て本文中に含めています. また, このノートの文責は, 誤りも含め, 全て穂坂にあります.

### 目次

|     |                          |    |
|-----|--------------------------|----|
| 0   | 今回のセミナーの概要               | 2  |
| 1   | 結び目とは何か                  | 3  |
| 1.1 | 結び目に関する定義 . . . . .      | 3  |
| 1.2 | 結び目の正則射影図 . . . . .      | 5  |
| 2   | Jones 多項式の導出             | 7  |
| 2.1 | 分配関数の考え方 . . . . .       | 7  |
| 2.2 | 歴史を振り返る . . . . .        | 10 |
| 2.3 | Jones 多項式の導出 . . . . .   | 12 |
| 3   | Jones 多項式の圏論化            | 17 |
| 3.1 | 状態の細分化 . . . . .         | 17 |
| 3.2 | Khovanov ホモロジー . . . . . | 19 |
| 3.3 | 主結果とその応用 . . . . .       | 24 |
| 4   | 質疑応答                     | 28 |
| 5   | 参考文献                     | 30 |

---

<sup>\*</sup> 東京大学大学院数理科学研究科 特任研究員

<sup>†</sup> 開成中学校・高等学校 数学科 教諭

## 凡例など

- 文献の参照は、「著者名」と「出版年（西暦）」を連結したものを、角括弧 [] でくくって表します。参照した文献の情報は、末尾の参考文献一覧にまとめています。
- 学術的な文脈では、人の名前に敬称をつけないことが通例です。しかし今回のセミナーでは、講演者の伊藤先生と関わりの深い数学者が登場します。敬称がついているときは、そうした「個人的な繋がり」が意識されています。
- 今回の講演の聴衆には、生徒だけでなく教員もいます。教員に向けたコメントは [注意] のタグを付けて小さい字で記しています。

## 0 今回のセミナーの概要

オイラー数という整数で図形の形を見分けることがある。その整数の背後にある意味を見ようとすると、我々は空間の次元であることを知って少し嬉しくなる。これは定量により形を知る例であり、局所から大域を知る例でもある。

1984 年、結び目のジョーンズ多項式というものが発見され、低次元トポロジーは、熱狂の時を迎えた。この多項式の各係数は整数であった。しかしながら、この整数の意味を空間の次元として説明するためには、我々は四半世紀後のホバノフホモロジーを待つことになる。21 世紀はホバノフホモロジーによる激しい火のような論文競争の中で幕を開けることになる。

結び目といっても結び目が入る容れ物が変わる場合は、通常個別に扱わなければいけない。ホバノフホモロジーの場合もそれぞれにホモロジーは考えられ、それぞれに結び目不変量であることが証明された。ホバノフホモロジーの発見から 10 年ほど経った 2011 年に講演者は、それぞれのホモロジーが結び目不変量であることの各々の証明を統一的に与える方程式を発表した。

本講演では、それまでに至る苦闘を交えてこの講演者の結果をお話ししたい。またエピローグとしてこの方程式が一人歩きし始め、発展する可能性と現在の様子にお話しとして触れておきたいとおもう。この講演は尽きぬことのない若者の熱き志に贈るものである。

# 1 結び目とは何か

## 1.1 結び目に関する定義

■結び目とその同一視 まず結び目の定義を書きます。結び目 (knot) とは、円周  $S^1$  を空間に埋め込んだ  $K: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  のことです。ここで「埋め込み」というのは、交わりがなくすっぽり埋め込んだ、という意味です。ただ、交わりが無くても、結ばっていることはあるかもしれないというものです。興奮してくると英語の “knot” の方しか板書しなくなる可能性があるのですが、英語の言葉遣いも認識しておいてください。

1 つ物を定義したら、「同一視」の定義もしなければなりません。そこで 2 つの結び目が同値であることを定義しましょう。2 つの結び目  $K, K'$  が同値とは、次のような  $F$  が存在することをいいます。

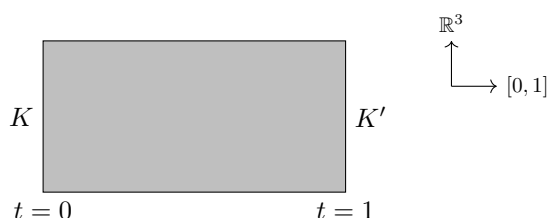
- $F: \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, t) \mapsto F(x, t)$  は連続かつ滑らか
- 各  $t \in [0, 1]$  に対し,  $F_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; x \mapsto F(x, t)$  は同相
- $F(K, 0) = K, F(K, 1) = K'$

変数が多いですが、これによって、結び目の対の片割れ  $K$  が  $K'$  に写る様子を表します。

- $t$  は時刻を表します。1 秒でも 1 分でもいいんですが、 $t$  が動くことで時計が一回りするイメージです。
- $x$  は、3 次元空間の点を表しています。

各  $t$  に対して  $F$  に  $t$  を代入してしまうと、 $F_t$  という空間から空間への写像があります。これが同相であるとしします。「同相」というのは、粘土をちぎらずに変形するような感じです。そして  $t = 0$  のとき  $F$  は  $K$  を動かさない、つまり  $F(K, 0) = K$  で、 $t = 1$  のとき  $F$  は  $K$  を相手方の  $K'$  に動かします。

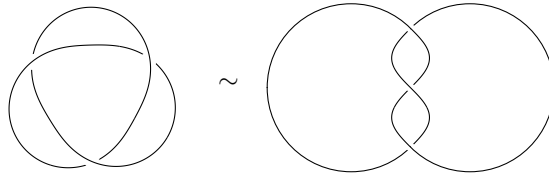
このイメージを表してみましょう。まず定義域の絵を描きます。



これを何故長方形で描くのかというと、 $F$  の変数が 2 つあるから\*1です。ここに現れるのは閉じた紐なので、紐をたどるような軸を持ちます。この左側が  $K$  で、右側に  $K'$  があります。時刻が  $t = 0$  から  $t = 1$  なので、横軸は 0 から 1 までです。そして「連続」というのは、この領域内をべたっと隙間無く動いていくということです。

相手方には値域があります。値域がどうなっているかというと、こんな形の絡まった結び目が現れます。

\*1 長方形の左右にある縦の辺は「3 次元空間」を表しています。本物の  $\mathbb{R}^3 \times [0, 1]$  の絵を描こうとすると次元が 4 つ必要なので、やむなく  $x$  に 1 次元、 $t$  に 1 次元を割り当てています。こうした「本来高次元であるものを、低次元の絵で代用する」という操作は、数学ではしばしば見られます。

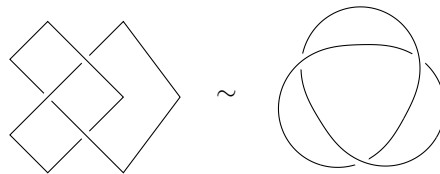


右側のチョウチョのような形をした結び目をなんとなく黒板の上に垂直に立ったつもりで眺めてみると、実は左の結び目と同じだと気づいたりします。ですがこれを見抜くにはそれなりの訓練が要るので、この話はまたいつかのお楽しみとしておきましょう。

何にせよ「時刻  $t = 0$  から時刻  $t = 1$  まで途中が隙間無く連続的に動く」というのが要請です。

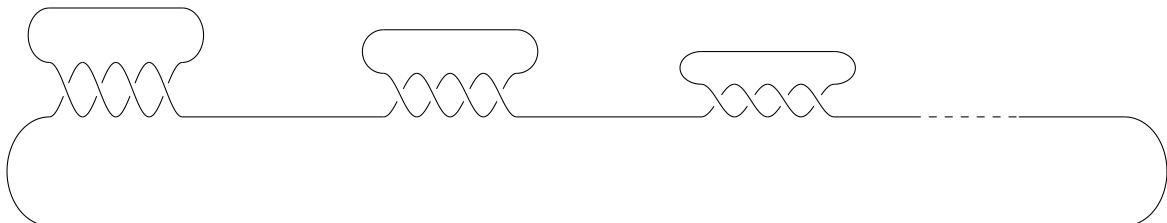
■**tame な結び目** ここで「滑らか」という条件は、色々なことを心配して仮定しています。結び目には実に多様なものがあるのですが、その中でも性質のいい **tame な結び目** というものだけを考えたいのです。

Tame な結び目とは「折れ線表示できる結び目」と同値なものを指します。（「同値」というとまた難しい定義を思い出さなければいけないのですが、雰囲気を先に掴みたい人は、連続的に動かして行って折れ線に重ねられるものだと思ってください。しっかり理解したい人は、さっきの同値の定義域と値域を理解してください。）折れ線表示の定義をしていますが、まともに定義すると大変なので、絵を描いておきます。イメージでいうと「有限個の楊枝を端っこで繋いだもの」が折れ線結び目です。たとえば、次の左の折れ線結び目は右のものに重ねられます。



この折れ線では尖ったところがあるのが少し心配ですが、こういう真っ直ぐな線分を繋いで出来る区分線型 (PL; piecewise linear) なカテゴリと、右の図のような滑らかな、全部の点で微分可能な曲線というタイプのカテゴリがあって、これらの扱い方はほとんど同じだことが知られています。これを出発点にしないと、結び目は中々語れません。

もっと特殊な例も紹介しておきます。いま怖がっているのは、次のような結び目です。



よじった 2 本の線を 3 つ並べ、右に行くにつれ段々小さくなるように、それぞれの線の左と右をつなぎます。これが繰り返し、無限回コマ結びされてできる結び目があります。「滑らか」という条件を外してさっきの定義域、値域を考えてしまうと、このような結び目が容易に現れてしまいます。こういうのが tame でない結び目で、**wild** と呼ばれます。ちなみに、今の例はまだ紐が結ばれてるからいいですけど、どこかで糸が切れていると有限回の操作ではいけないので「ほどけている結び目とは何か」すら分からなくなってしまいます\*2。

Ralph Fox 先生という John Milnor 先生\*3の師匠にあたる人が「tame か wild か」という分類を定義したのはずいぶん前の話\*4なんですけど、wild knot theory というのはまだ構築されていない、未開拓の分野です。こうしたことをちゃんと論理的に捉え理論を構築すると、第一線の数学者に並ぶことができます。Wild knot に対しては直観があまり働かないので、理論を全部整備しなければなりません。しかし、そういうのは大事なことです。ぜひ、トライされるとよいと思います。

結び目理論というのはこのように、いきなりよく分からないものが出てくる恐ろしいものを扱っています。今日はそのようなものは扱わず、最初に出てきたような、有限個の楊枝を繋げたような形のものを主に念頭に置いておきます。そうすると、直観的に分かることですが、平面に描いたときに現れる交差点が有限個しかありません。これはとても楽な場合です。しかしそれでも、恐ろしいことが次々と襲いかかってきます。結び目理論を学び始めると、どうしてもそれを考えざるを得ない状況のため、難しいの分野に足を踏み入れてしまいます。

## 1.2 結び目の正則射影図

ではどういう取り扱いをするのかというと、**正則射影図**なるものを使います。いままでも断りなくやっていましたが、「ひもの形」を平面に射影して考えると便利です。ただし空間内にある閉じた紐をべたっとガラス板に貼り付けて平面に落とすとき、交点になってしまったところは、紐の形が見えなくなります。空間にある結び目を、平面に形を落とさずに描きたい。だから紐の構造を上手く写し取るように絵を撮ります。

そこで、次の条件を満たす射影図を正則射影図といいます。

- 3 重点を避ける
- 接点を避け、自己交差は横断的なものだけを許す（交わりが横断的\*5になるようにする）

つまり自己交差している点が「片方が上、片方が下」と表せるということです\*6。

\*2 数学では、絡まっていない糸も「自明な結び目」と呼んで、結び目の仲間に入れます。これは数における 0 のようなもので、ほどけた後のものも仲間に入れておくと、理論がスッキリ書けるのです。

ところで「1 本の糸」を結んだものは原理的にほどけるはずですから、今の定義に照らせば「閉じていない結び目は全て自明」となるはずです。しかし今出てきた wild knot をどこか 1箇所 でちょん切ると「無限回の絡まりがある 1 本の糸」になってしまいます。これは端っから順に絡まりを片っ端からほどいたところで、いつまでたっても絡まりが残ってしまうので、自明な結び目とは呼べません。

\*3 John Milnor は 1962 年に Fields 賞を受賞した、20 世紀を代表する幾何学者です。『微分トポロジー講義』『モース理論』『特性類講義』などいくつもの名著を記述していて、数学専攻では知らない人がいないくらい有名な人です。

\*4 [Fox–Artin1948, p. 979]

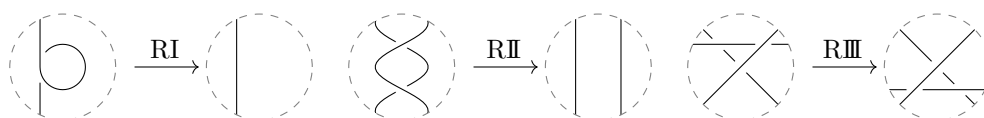
\*5 要するに、我々が普段「交わる」というときに想像する図のことです。

\*6 たとえば次のような絵が、想定されているダメな例です。三重点が来ると「下にある 2 本の紐の上下」が分かりませんし、接点があると「紐が接する点で上下が入れ替わっているのかどうか」が影から判断できません。



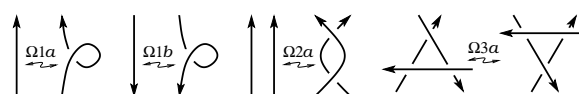
これを写し取ると次のように、割と簡単なパズルみたいなことが起きます．1920 年代，Reidemeister が次のことを示しています．

**定理 1** [Reidemeister1927].  $K \sim K'$  であることは，正則射影図  $D_K, D_{K'}$  が（今は，tame 性を仮定しているので）有限回の 3 タイプの操作 (RI), (RII), (RIII) でうつり合うことと同値である\*<sup>7</sup>．



ここで点線を描いたのですが，それは「その円盤の部分だけに注目しています」という意味です．こうすると，絵の取り替え操作でパズル的な扱いができます．ちなみに Reidemeister は，tame であることを仮定して論文を書いています．紐の向きを記していないのは，記すと状況が変わるからです．紐に向きがついた場合は，途端に最先端の話になります．もちろん対応する操作は知られているのですが，最小生成系\*<sup>8</sup>が次の 4 つの局所的な操作だけで良いと示されたのはすごく最近，2010 年のことです．昔なのか最近なのかよく分かりませんが，皆さんが生きてきた人生の半分くらい前の出来事でしょうか．

**定理 2** [Polyak2010, Theorem1.1]. 向き付けられた射影図の最小生成系は以下の通り．



([Polyak2010, Figure 5])

## 余談

ちょっとだけ無駄話をすると，私が修士論文を書いたとき，上下の情報がない射影図の生成系をあれこれ計算していました．論文は雑誌に載るまでレフェリーという審判員がおかれているものです．レフェリーに生成系が足りていることを説明するためにそれなりの努力をしたのです．しかしそれは「分かったからもういいや」と論文には最終的に入りませんでした．レフェリーに「これはどうなんだ」と聞かれるごとに証明をつけて答えていましたら，既に論文が 40 ページを超えて長くなっていたのです．ある意味仕方がないことでした．

ところで私が海外でお世話になった Viro 先生が，定理 2 の Polyak 先生に「結び目の向きがついたときに，生成系として何が最小かが整理されていないじゃないか」という意味合いの問題を出したようです．これは上下がついた難しいバージョンです．

私が修士論文を書いたのは 2006 年あたりのことで，その後 2010 年に Polyak 先生が問題を解決され，結び目の射影図の生成系について研究が進展したというのは感慨深いことです．

\*<sup>7</sup> Reidemeister の原論文 [Reidemeister1927] では，操作 RI と RII の番号付けが現代と逆になっています．

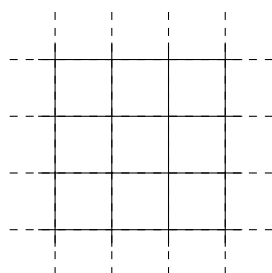
\*<sup>8</sup> 生成系というのは「これらの操作があれば十分」という組合せのことです．それに加え最小生成系というのは，「生成系はこれ以上減らせない」というものを表します．

## 2 Jones 多項式の導出

ここまでで結び目がどのようなものなのかが整理され、皆さんは大分慣れてきたのではないのでしょうか。やっと、Jones 多項式というものの話をしていこうと思います。

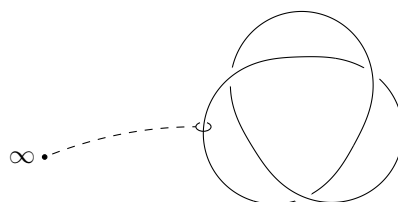
### 2.1 分配関数の考え方

■統計力学の話題から ちょっと唐突な話ですが、2次元格子を考えます。



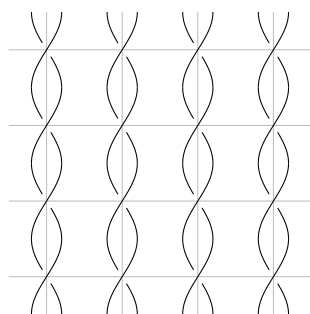
なんで2次元平面を考えなきゃいけないかという話をします。1984年の前までは、3次元空間の物を扱っていました。空間内の紐に対して一生懸命、外側の空間がどれくらいぐしゃぐしゃなのかを縄をかけて調べていました。

[注意] 先生方に向けて言うと、ここでは基本群を考えているというわけです。



正則射影図という概念が入ったら、これが今度は「2次元平面の上に描かれた絵の複雑さを捉える」という話になったわけです。でも急には比べられないからどうすればよいかというと「規則的に交差点を描いておくと複雑さ度合いが測られる」と考えるわけです。

たとえば、2次元格子に規則的に紐が乗って、よじれている様子を思い浮かべます。



本来はこの格子上に水素原子や酸素原子というのを描いて、その状態に 6 つのパターンがあるとかいう話をしなきゃいけないんです\*9。けど、きっとそれは物理の先生がやってくださってる、やってるに違いないと思いますので、ここでは省略します\*10。今は数学ですので、背景の物理のことは忘れて、絵と式を描いてみましょう。

温度から決まる関数  $Z(T)$  というのがあって、温度  $T$  でエネルギー  $E(s)$  の状態  $s$  が実現する確率分布は

$$p(s) = \frac{1}{Z(T)} \exp\left(-\frac{E(s)}{kT}\right)$$

で与えられます (exp というのは説明していませんが、ある関数です)。  $k$  というのは定数です。名前があるので後で調べられるよう、**Boltzmann 定数**という紹介をしておきます。欲しいのはこの  $Z(T)$  で、**分配関数**と呼ばれています\*11。いま  $p(s)$  を「確率」だといっているの、それぞれの格子点上のありとあらゆる状態を考えて全ての確率を足し合わせると、和は 1 になります。だからここから

$$Z(T) = \sum_s \exp\left(-\frac{E(s)}{kT}\right)$$

と書けます。積分の形で書くのが本来の形ですが、ここでは有限通りなので有限和  $\sum$  で表しておきます。

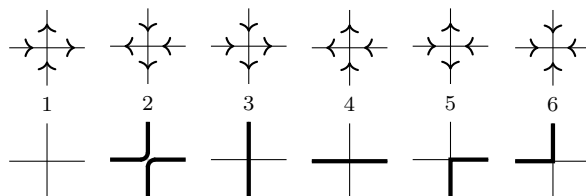
\*9 原子レベルで物性を調べるとき、このように「格子の上に原子が乗っていて、それらの個々の相互作用が全体的な振る舞いに寄与する」という設定で理論を構築することは非常によくあります。もっとも簡単なのは Ising 模型という、磁性体の模型です。この模型では、格子状に並んだ磁石が熱で揺らぎながら上下にクルクル動き回ります。次の図に 1 次元 Ising 模型の雰囲気を示します。ちゃんと磁石を並べるなら左の図になりますが、しばしば右図のように磁石の向きを  $\uparrow, \downarrow$  で略記します。



この模型では磁石の向きが揃った方が安定なのですが、温度が上がるほど熱による揺らぎが増えるため、磁性が弱まります。この挙動を調べるためには「各点の状態が全体にどう寄与するか」を調べる必要があるというわけです。

さて講義中に登場した「6 つのパターンがある」という話は、6-vertex 模型 (あるいは ice-type 模型) と呼ばれる、別の有名な模型を指しています。これは、格子の点に水  $H_2O$  の水素原子、辺に酸素原子を配置するような模型です。頂点を基準にして状態を考えると 6 通りの状態が取れるので、6-vertex と呼ばれています。

講義中では、簡単な Ising 模型ではなく 6-vertex 模型が現れました。これには「結び目の分配関数を想像するのに都合がよい」という理由があります。6-vertex 模型では水素結合が引き合う向きを格子の辺に乘せるわけですが、それに対応して「左向きと下向きの線を太く表す」という方法で別の図を描くと、模型の性質を調べるのに大変役立つのです。対応を以下に記します。



Jones 多項式の導出では「交点を状態に置き換える」という考え方が突飛なようにも見えますが、こうした 6-vertex 模型を踏まえると自然に思うことができます。たとえば R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Dover (2013) などに詳しい説明があります。

\*10 中学校・高等学校の授業で統計力学を扱うケースは、あまり多くないと思われます。

\*11 格子模型では、物理で大事とされる色々な量が、ほとんど分配関数の計算から導かれることが経験的に知られています。だから分配関数を求めるというのは、基本的なモチベーションなのです。

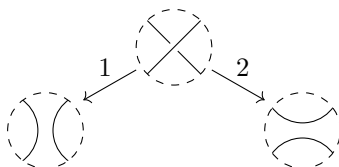
そしてエネルギー状態というものが、粒子1つ1つのある状態を足し上げたものであることが知られているわけですね<sup>\*12</sup>。exp をちょっと書き換えておいて、ある重みの足し上げ<sup>\*13</sup>というようにしておきます。

$$\exp\left(-\frac{E(s)}{kT}\right) = \prod_{c: \text{格子点}} w_c(s)$$

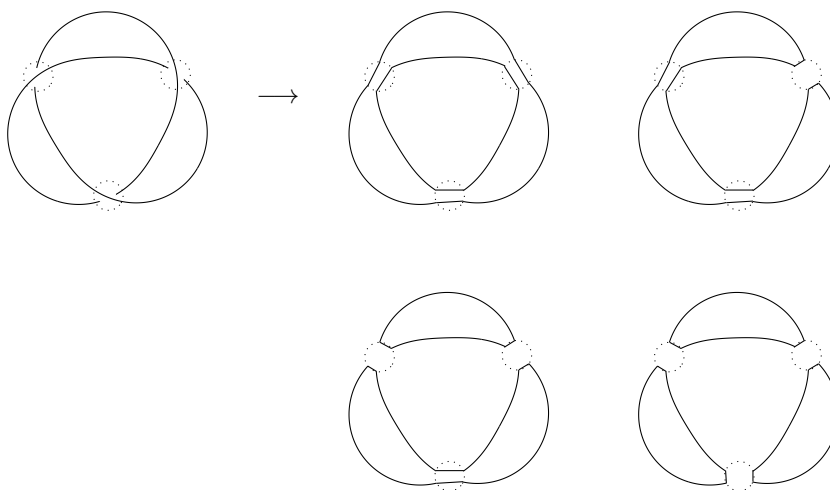
$c$  は格子点で、格子点毎にある数をかけて足し合わせる、そういったものを考えます。ここでの  $w_c(s)$  を **Boltzmann ウェイト** といいます。

気分としては、良い分配関数の理論を紐に当てはめれば、紐の様子が調べられるのではないかと。結論は、良い分配関数を見つけよ！という問題になります。このような形で、Jones 多項式というものがふっと現れてくるのです。

■Jones 多項式の導出に向けて 結び目というものの複雑さを理解する1つのポイントは、物理的な背景があったということです。紐が上下でクロスした点の状態を、分子の状態になぞらえます。今は2通りくらいに話を単純化して、紐の交差点の状態が状態1とか状態2だとします。これはミクロな情報です。



そして、たとえば三葉結び目のように3つ交差点があると  $2^3 = 8$  通りの状態が出てきます。ちょっと多くて困るので、全部描かずに代表的なものを描きます。



いま交差点だったところをマークすると、どの場所も状態1か状態2の2パターンです。これがマクロな情報です。

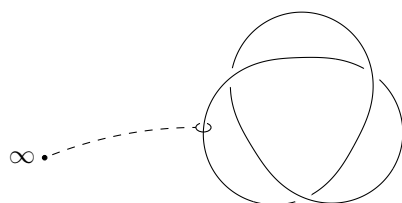
<sup>\*12</sup> この事実は「Boltzmann の原理」と呼ばれています。

<sup>\*13</sup>  $\prod$  は  $\sum$  の掛け算バージョンです。そしてここに出てくる式は掛け算ですが、指数関数の掛け算は指数の足し算に直せるので、肩を見て「足し上げ」と呼んでいます。

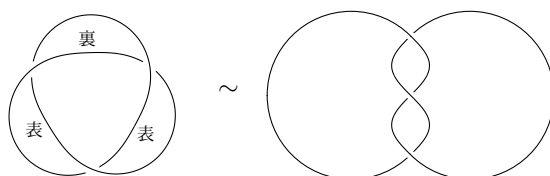
## 2.2 歴史を振り返る

分配関数の導入は、結び目理論という物が大きく変わったところです。ちょっと、これまでの歴史を振り返ってみましょう。

1970 年代に遡りますと、紐の外側の空間だけ調べるといった形で結び目を調べていました。xyz 空間の中に紐があって、紐に沿ってトンネルを掘って、その外側を考える。その外側がどういうものかというのを、紐をターザンのように引っ掛けたりしたりということをして、どこへんにどういうものがあるのかを調べていました（ジェネレーションギャップがあるから伝わらないかもしれませんが…）<sup>\*14</sup>。



この絵をちょっと右から見ると、Möbius の帯<sup>\*15</sup>を含んでいるように見えちゃったりします。そこでこう変形をして、Möbius の帯を含まない形に持って行きます。これは実は同値というように変形ができます。



こうした Möbius の帯が最小どれくらい入るかカウントした数を **crosscap** といいます。crosscap というものがあって、紐の交差点が上下上下というようになっている、そういった結び目は割と広いクラスなのです。

ちなみに話す予定じゃなかったんですが、宣伝の意味も込めて、せっかくだから話そうと思います。crosscap 1 という結び目は 1978 年に分類された<sup>\*16</sup>のですが、先月 crosscap 2 の交代結び目を、僕ともう一人、中学校の先生との共同研究で決定しました<sup>\*17</sup>。crosscap 1 の決定から 40 年間あいています。crosscap 3 の結び目も実は密かに決めつつあるんですけど、それには空白がまだ半分くらいあって、データベースが完成していません。割と hot なものにしていきたいと思います<sup>\*18</sup>。

また、この結び目の絵はトーラスにいくつか穴を空けたものと同相で、この穴の最小数も昔から評価されていました。こちらは非常に由緒正しく、昔からたくさん研究されてきました。こういったものを一生懸命評価したり調べたりというのが 1970 年代の話です。その際使う道具が、Alexander 多項式という道具です。1920

<sup>\*14</sup> 「ターザン」は、1999 年に公開されたディズニー映画です。

<sup>\*15</sup> 細長い紙を 1 回ひねって貼り合わせてできる図形です。向き付け不可能な曲面の中で、最も基本的なものです。

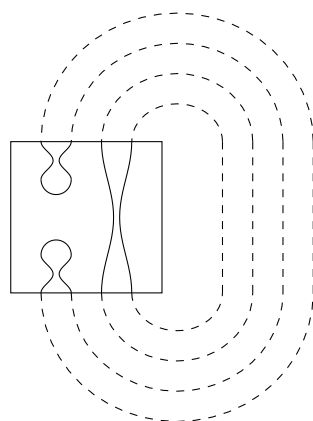
<sup>\*16</sup> [Clark1978, Proposition 2.2]

<sup>\*17</sup> [Ito-Takimura2018]

<sup>\*18</sup> このセミナーの後 2019 年 3 月になって、講演者の伊藤先生により任意の自然数  $n$  に対して crosscap  $n$  の交代結び目が決定されたそうです (Noboru Ito and Yusuke Takimura, A lower bound of crosscap numbers of alternating knots, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, accepted 2019/11/22).

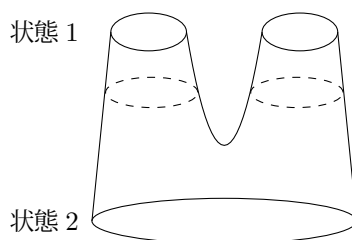
年代に Alexander というすごく偉い先生が、ある多項式を結び目射影図から計算して出したという話があります\*<sup>19</sup>。90 年ほど前の話です。気分としては、点  $\infty$  が  $xyz$  空間の中に 1 個ありますから、縄をかけて調べていったという発想と基本的には同じです。

1984 年という、色々なことがあった年だと伺っています。さっき言ったように、いきなり「平面的な絵を考えよう」ということになりました。平面的な物に、ウェイトという物を置いて調べていました。さっきは格子点の上に状態を規則的に並べたのですが、今回は違うバリエーションがたくさん出てきます。状態もいっぱい出てきます。また、今度は「出力」を考えます。さっきの図で描いた紐は閉じてないんです。そこで閉じるという操作を登場させて考えていきます。どういった形にするかという、この絵に対して、閉じた紐を考えてしまいます。



ここで鋭い方は「さっきまで 1 つの紐の話をしていたのに今度は複数の紐が出てきてるじゃないか」と思うかもしれません。それはその通りで、紐が 1 本だけからなる結び目は、有限本の紐が自由に絡まった**絡み目**という概念に拡張されます。そうすると、紐を閉じることができます。そして紐を閉じるということは、行列を習っている人からすると実は「トレースを取る」という操作に対応します。このことを後で説明します。

そして「まだあなたは圏論化の話をしないじゃないか」と言われるかもしれませんが、2000 年代になったら、さらに色々話が拡張されていきます。状態ⅠとかⅡとかがあったら、それを繋ぐ曲面みたいなのが考えられます。こう、乗っかれるようなものです。



絡み目の絵でトレースを取って出てきたのが Jones 多項式という 1 変数の多項式で、曲面の絵で変数を  $q$  とかすると、もっと広がりのあるものが出てます。これが Khovanov ホモロジーというものです。

---

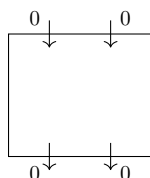
\*<sup>19</sup> [Alexander1928]

## 2.3 Jones 多項式の導出

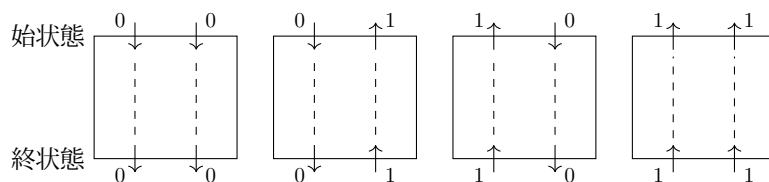
■行列として見る ではトレースを見るために、さっき  $w_c$  と書いた、交点毎に決まるウェイトというものの決め方というのを見ていきましょう。そのために、全てを行列で見ましょう。

$xy$  平面上の話をしてします。これは 2 次元空間というものです。これに今まで 30cm 定規のようなもので目盛りを入れて考えていたのですが、もうちょっと自由に空間というものを考えていいんじゃないかと思うわけです。「ブタと麒麟」みたいに、2つの記号なら何でもいいんです\*20けど、ここでは  $0 \downarrow$ ,  $1 \uparrow$  といったものからなる 2 次元空間を考えます。

交点  $\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$  の状態を、行列の成分として書き切ります。四角の中に端っこが 4 つあるものを考えます。ある交点の近傍に円盤を、複数交点が入らないように取れたら、その周りの  $0 \downarrow$  と  $1 \uparrow$  のパターンからその中身を得ようという考え方です。交点が現れないよう線を引いて、しかも向きが整合的になるよう矢印を繋ごうと思うと、たとえば全部  $0$  のものの中に何が入って欲しいでしょうか。

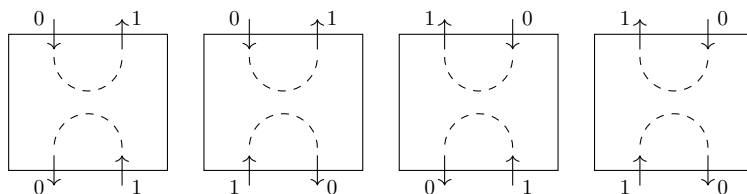


左上の  $0 \downarrow$  から出た線をバックして右上の  $0 \downarrow$  に繋げるわけにはいきませんから、縦に繋げるしかありません。0101 のケースはターンして繋ぐこともできますが、さっきと同じく縦に繋いでみましょう。で、これを初期状態から終わりの状態への変化だと見ます。



何も変化しませんでした。これは恒等行列と呼ばれる元に対応します。実のことをいうと「行列というからには、もっといっぱい元を考えなきゃいけないんじゃないか」と思うわけですが、紐のつながり方がうまくいくケースしか出てこないということに気がつけます。

上の行・下の行両方とも左右の向きが違うベクトルが並んだ図を繋ぐものに対応する行列は、 $M$  とします。本当はユニタリの  $U$  にした方がいいんですが、今日は表現論の専門家はいないと仮定して話をすすめます。



\*20 実際に「ブタと麒麟」を使うことはほとんどないでしょうが、たとえば我々が  $x$  軸,  $y$  軸と呼んでいるものについて、 $x, y$  という名前それ自身には本質的な意味はありません。そういう意味です。

行列という何丁目・何番地という形で書いてみます．最初から恒等行列なのでちょっと簡単なのですが，こういう場所に数が入る．

$$\begin{array}{c} 00 \quad 01 \quad 10 \quad 11 \\ \begin{pmatrix} I_{00}^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{01}^{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{10}^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{11}^{11} \end{pmatrix} \end{array}$$

では  $M$  はどうなのでしょう？こちらは綺麗に，真ん中あたりの 4 つに成分が固まり，ここのところだけ何かが入ります．周りは全部 0 です．

$$\begin{array}{c} 00 \quad 01 \quad 10 \quad 11 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{01}^{01} & M_{10}^{01} & 0 \\ 0 & M_{01}^{10} & M_{10}^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

下の添え字を入力したら上の添え字を出力するというルールで揃えることが一般的です（黒板では逆にしてしまいましたが）．なんとなく，この添字 4 つの 01 の並びが，上の図の境界みたいなものとマッチするように書けるわけです．で，これらに係数をかけて足し合わせた式を考えたい．この式はいったい，どういうものになっているのでしょうか？

■期待される性質 ブラケット（「く」の字の形の括弧）で結び目をくくったら，これが「何らかの多項式なんですよ」とします\*21．

$$\left\langle \text{図} \right\rangle = (\text{何らかの多項式})$$

上の考察から，推理小説みたいな感じで，どんな形のものが出そうか推察しましょう．まず 1 本の閉じた紐を取り出したら  $\delta$  としておきます（本当はチャージがどうだというべきなのですが）．そして次のように定まる  $A, B, \delta$  という 3 つの変数を決めることにします．

$$\langle \bigcirc \rangle = \delta, \quad \langle \diagdown \rangle \mapsto A \langle \rangle \langle \rangle + B \langle \rangle \langle \rangle$$

すると，期待されるべき性質があります．紐として変わらないものは同じはずです．

$$\langle \text{図} \rangle = \langle \text{図} \rangle$$

左辺については，上の紐の 2 つの交点でそれぞれ横に切るか縦に切るかを考えることで展開してみると

$$\langle \text{図} \rangle = A^2 \langle \text{図} \rangle + AB \langle \text{図} \rangle + BA \langle \text{図} \rangle + B^2 \langle \text{図} \rangle$$

が得られます\*22．第 2 項には先に細工をして， $\delta$  という円周を取り出しておきます．

\*21 結び目の紐は色々動かしたりできるのですが，結び目から多項式が決まって欲しいので「同じ結び目であれば，見かけが変わっても同じ結果が得られる」と仮定して話を進めます．

\*22 上と下の交点で切断の向きが違ってくるように見えますが，これは上側の紐の向いている方向が異なるからです．交点を分解するルール「上側の糸に立った状態で左と前，右と後ろを接続する」に従うと，この図が得られます．

$$AB \langle \text{circle with two dots} \rangle = AB\delta \langle \text{circle with one dot} \rangle$$

それでは、期待されるべき条件を満たすにはどうすればよいでしょうか？

- 状態を崩す順番に依存して式が変わってしまうのは避けたいと思うので、 $AB = BA$  とします。この結果、次の式が得られます：

$$\langle \text{circle with two dots} \rangle \langle \text{circle with one dot} \rangle = \langle \text{circle with two dots and one dot} \rangle = (A^2 + AB\delta + B^2) \langle \text{circle with one dot} \rangle + BA \langle \text{circle with two dots} \rangle \langle \text{circle with one dot} \rangle.$$

- 左辺と右辺を比較すると、今度は  $BA = 1$  になって欲しいわけです。こう仮定すると、 $A$  の逆元というものが存在します。
- さらに、残りの 3 項は消えて欲しいので、 $A^2 + AB\delta + B^2 = 0$  とします。これを解くと、 $B = A^{-1}$ 、 $\delta = -A^2 - A^{-2}$  となります<sup>\*23</sup>。

これらはあくまで、上手くいくための十分条件です。もしこれで上手くいかなかったら「分配関数が作れなかった」ということで、 $AB = BA$  という条件を外して考えます。

これらの式が RIII を満たすことを先に要求してもいいです。この計算は大変ですが、これをやっても自ずと規制が生じてきます。さっきのやり方が全てというわけではありません。

先日 LMO 不変量<sup>\*24</sup>という 3 次元多様体の一番強い不変量の解説を聞いたんですけど、やっぱりなんか推理する探偵みたいな感じで、全部の対称性を仮定して「大体全部の条件を課します」ということをしています。今のところこういうことをしなきゃいけないのかな、と思います。とりあえず、幸運を祈って上の条件を課します。

**■半円の考察** Jones 多項式が出るまであともう少しです。Jones 多項式というのは 1 本か 2 本の式<sup>\*25</sup>で（数列みたいに）帰納的に決まる<sup>\*26</sup>ものなのですが、今回はここでものすごい物わかりが悪く、「なんでこうなるんだ」ということを必死に考えて得られる様子を記しています。こうやって「すごく物わかりが悪くなりました」という見方を考察していると、その背後に「圏論化」というものが浮かび上がってくるのです。

さっき交点だけを見てきましたが、ここで  $\delta$  の方をもうちょっとだけ考えましょう。 $\delta = -A^2 - A^{-2}$  の「意味」をさらに考えます。計算上出てきたものですが、先ほど「交点が状態の和である」と考えたように、この円周が「正の向き<sup>\*27</sup>の円」と「負の向きの円」が足されたものだと思います<sup>\*28</sup>。 $A^2$  を正の向きに、 $A^{-2}$  を負の向きに対応させています。

<sup>\*23</sup> Jones「多項式」なのに  $A^{-2}$  が出てきますが、これは間違いではありません。Jones 多項式は狭い意味の「 $A$  の多項式」ではなく、「 $A$  と  $A^{-1}$  の多項式」として定義されるものです。こういうものには Laurent 多項式という名前が付いているのですが、文脈から明らかなきはしばしば「多項式」と省略されてしまいます。

<sup>\*24</sup> Le-Murakami-Ohtsuki の略です。

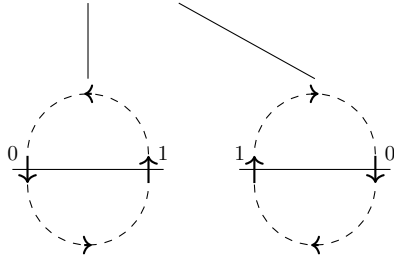
<sup>\*25</sup> 講義中には表立って登場しませんでした。この式には「スケイン関係式」という名前がついています。

<sup>\*26</sup> ここでの決まり方は、よく見る数学的帰納法よりはもう少し複雑です。ただいずれにせよ、難しいものを簡単な物に帰着させていくという点は同じです。

<sup>\*27</sup> 反時計回りが正の向きです。

<sup>\*28</sup> これは論理的な帰結ではありません。式と図を見比べて「こう考えたら上手くいくのではないか」という仮説を立てて、推論を進めているのです（もちろん現在では、これで上手くいくことが分かっているのですが）。

$$\langle \bigcirc \rangle = -A^2 - A^{-2}$$



こうすると、左右どちらの円も「何かの  $\frac{1}{2}$  乗が 2 つかかった」と思えば、図形として「半回転しているところ」という幾何的な意味合いを捉えられそうです。だから先ほどの「Boltzmann ウェイトを掛け合わせましょう」という精神に従い、 $\frac{1}{2}$  乗が 2 つあって  $-A^2 = (-A^2)^{1/2}(-A^2)^{1/2}$  なのだと考えます。ただそうすると  $-1$  の  $\frac{1}{2}$  乗が出てきます。もしかしたらこれは勉強していない人がいるかもしれないし、数学の人も「なんかやだな」と思ったりします<sup>\*29</sup>。なので、こういったものを定数倍していじろうとするわけです。今は上半円の左回りを  $A$ , 右回りを  $-A^{-1}$  というコンビネーションにします。それから、下で閉じる方の縦ベクトルも書いておきます<sup>\*30</sup>。さっきの横ベクトルとつじつまが合うよう上から順に  $-A, A^{-1}$  とします（なお、マイナスの付け方は好みの問題です。虚数が出るようにしても大丈夫で、 $\sqrt{-1}$  が出る形にしても Jones 多項式が出てきます。今は  $\sqrt{-1}$  を避けたいので、こういう符号の付け方にしました）。つまり

$$\begin{pmatrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 0 & A & -A^{-1} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -A \\ A^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = -A^2 - A^{-2}$$

です。0↓と0↓同士、1↑、1↑同士の組合せを繋ぐ円周はないですから、両端の成分は 0 です。こういった形にすると、やっと分配関数っぽく、Jones 多項式というものが現れます。次の分配関数が大体 Jones 多項式です。

$$\langle D \rangle = \sum_s \prod_c \text{wt}(E_c(s))$$

ここで weight というものが何かということをもう少し考えなければいけません。これは上の  $I$  と  $M$  で決まっているとしてください。1 つだけ例をやっておきましょう。たとえば交点を上下に解消すると、後ろの状態には  $A^{-1}$  が掛かります。

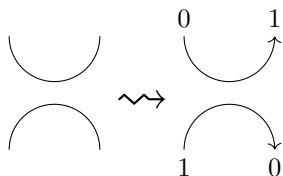
$$\langle \diagup \diagdown \rangle \mapsto A \langle \diagup \rangle \langle \diagdown \rangle + A^{-1} \langle \text{cup} \rangle \langle \text{cap} \rangle$$

<sup>\*29</sup> 複素数を使ってダメなわけではないですが、係数の範囲を一旦制限しておく、後で係数を拡大するバリエーションが色々増えたりします。

<sup>\*30</sup> ここで、数が縦ベクトルと横ベクトルに分かれているのは、行列と思っているからです。「結び目の図式を行列と思う」という考え方に立つと、輪っかの上半分と下半分をくっつける操作が行列の掛け算に対応して欲しい気がします。そして「輪っかの切り口 1 箇所につき 1 個のベクトル」が並ぶと思うと、輪っかのでっぺんや下の端には「0 個のベクトル」、つまり数が並ぶのが自然です。

テンソル積の言葉で書くと、さっきの行列  $I, M$  は  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  という写像だと思っています。そして円の上半分が「0 個のテンソル積から  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  への写像」と思うと、この図式は  $\mathbb{C} = \mathbb{C}^{\otimes 0}$  から  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  への写像と考えるのが自然です。同様に、円の下半分は  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  から  $\mathbb{C}$  への写像となるはずで。そうすると、1 つの数（スカラー）を横ベクトルと縦ベクトルの積にすることが自然に見えます。

状態というからには、もう少し細かくしましょう。最初 2 つしかなかったんですけど、さらに場合分けを入れ 01 とか 10 をつけてしまいます。



そうするとこの上が  $-A$ , 下が  $-A^{-1}$  となります。これを全部掛け合わせたものが、交点に対する Boltzmann ウェイト  $M_{10}^{01}$  というものになります。これと元の係数  $A^{-1}$  をかけて、結局  $A^{-1}$  が残ります。したがって、1 つ 1 つの交点に対して「状態」というものを決めてたわけですが、もう少し細かく見られることが分かります。

行列論として幾何学を行列で扱う表現論というものを深く掘り下げていくと、01 だけでなく 012 とか 0123 とかでもよい。そうすると Jones 多項式に代わる **colored Jones 多項式** とかが出てくる。でも今日のところは 01 だけに抑えておいて、オリジナルの Jones 多項式が出るようにします。

■Reidemeister I 不変性 実はこれ、調整をしないと最初の type I<sup>\*31</sup> で不変になっていません。type I 不変になるように、少し調整します。ブラケットを計算すればよいことなのですが、ちょっと飛ばしてしまって

$$J(D) = (-A^3)^{-w} \langle D \rangle$$

とします。ある絵から与えられる  $D$  というものから、こういった Jones 多項式というものが定まります。この  $w$  というのは、今までの分配関数に対するのと同じものです。局所的に見て向きを付け、正の交点の数から負の交点の数を引いたものです。さっきまで  $D$  に向きを付けていなかったんですけど、向きを付けてこれを調整します。すると向きを外して考えたときに type I のブラケットを計算すると、この調整が必要だと分かります。

こうして定めた  $J(D)$  が Jones 多項式です。

■Jones 多項式の性質 Jones 多項式がどういう性質を満たすかも紹介します。 $K$  を向きがついている結び目として、 $D_K$  をその正則射影図とします。このときに  $J(D_K)$  は、 $D_K$  の取り方に依らない、つまりさっきの type I とか II とか III の変形に依らず決まることが知られています。Jones の定理と言うべきものでしょうか。

このような分配関数の見方が、物理的にはかなり条件をきつくしています。数学的に行列論として定式化したのは Reshetikin–Turaev で、それから Kirillov も仕事をしています。こうした形でいまの 01 というラベルを振ったり交点の壊し方を考えたとき、分配関数の見方というのが圏論化というものに繋がってくる。これが後半でやることになります。

色々いうと、Jones 多項式は解析学から出てきた<sup>\*32</sup>とか言わなきゃいけないんですが、そういったお話は先生方に譲ります。

<sup>\*31</sup> 結び目に対する変形といえば、ほぼ確実に Reidemeister 変形です。特に断りなく type I, II, III が出てきたら、それぞれ RI, RII, RIII のことだと思ってください。

<sup>\*32</sup> 結び目理論と統計力学の関係を見いだしたことで 1990 年に Fields 賞を受賞した V. F. R. Jones は、作用素環論という分野の専門家です。

### 3 Jones 多項式の圏論化

#### 3.1 状態の細分化

今度は圏論化というものを使って、Jones 多項式  $J(D_K)$  を詳しく見てパワーアップさせよう！と考えます。このモチベーションというのはあらゆる分野から感じることができるんですが、詳しい話はやめておきます。今は単に「結び目を捉える関数があって、それを分類研究によってパワーアップさせるのが一つのモチベーションだ」ということにしておきます。

先ほどの計算の細かいところを、じっくり眺めていきましょう。先ほどまで 1 本の紐からなる結び目を考えていたのですが、ここからは紐が 2 本の絡み目というものも考えることにします。実は絡み目に対しても、同じ計算ができます。

$$\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = A^2 \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A^{-2} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle$$

この初項をどう見ていたかという、先ほどやったように  $\delta^2$ 、つまり  $(-A^2 - A^{-2})^2$  となります。この 2 つの円周を詳しく見ていきます。

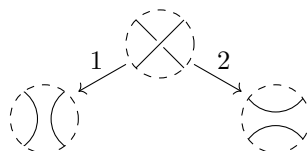
[注意] オリジナルの Jones 多項式を既に勉強した人からは「 $\delta$  が 1 個少ないんじゃないの」という指摘があるかもしれません。それは正規化の違い、すなわちほどけた結び目を 1 と思うか  $\delta$  と思うかの違いです。実は圏論化を考えると、どうしても空ダイアグラムのとき、つまり  $\langle \rangle$  の間に何も入らないときに  $\delta^{-1}$  が出るのが嫌なんです。空のブラケットの値を  $\langle \rangle = 1$  としましょう。

さっきと同様に、それぞれの円周に向きを付け考えます。この 4 つが何に対応するかというと、 $A^4$ , 1, 1,  $A^{-4}$  のはず。すると各項が、 $(-A^2)$  が「何回転したか」という数だけかかっているように見えませんか？

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Diagram 1} & + & \text{Diagram 2} & + & \text{Diagram 3} & + & \text{Diagram 4} \\ A^4 & + & 1 & + & 1 & + & A^{-4} \end{array}$$

すると元々  $\delta = -A^2 - A^{-2}$  の何乗かをひとかたまりで見ていたんですが、もう少し細かく「 $\delta^n = (-A^2 - A^{-2})^n$ 」を展開した後に、個々の単項式に対応する図を考えよう」と思い直されるわけです。そう思い直して Jones 多項式を変形していきましょう。

まず Jones 多項式の計算では、射影図の中の交点を上向きか横向きかに解消するのです。s という記号で、2 種類の状態 1, 2 という 2 パターンのどちらかを指すものとします。



そして、解消された後それぞれの弧に向きをつけ、さらに細かく見ることにします。だから、これまでの状態に加え、もう一つ**細分化された状態**というのが出てきます。英語では enhanced state と書かれるものです。これを表す訳語に気の利いたものがないので何とも言えないのですが、「一般に拡張された状態」とか書くとますます分からなくなってしまう。そこで「細かく見ているんだ」という気持ちを踏まえて、細分化された状態という訳語をひとまず使っておきます。

さて新しい記号を導入します.

- $\sigma(s)$  は, 各交点に対して横向き解消の数から上向き解消の数を引いたものです.
- $|s|$  は, 状態  $s$  に現れる円周の個数だとします.

そして今度は  $(-A^2 - A^{-2})^{|s|}$  を二項展開したものを, 細分化された状態と考えます. ここで, 各項を展開していくと同じ次数の項がたくさん現れるのですが, 細分化された状態に関して和を取ることになると, 二項係数は全部  $\sum$  に吸収されます\*33.

$$J(D) = \sum_s (-A^3)^{-w(s)} A^{\sigma(s)} (-A^2 - A^{-2})^{|s|} = \sum_s (-A^3)^{-w(s)} A^{\sigma(s)} (-1)^{|s|} A^{-2\tau(s)}$$

ここで  $\tau(s)$  を, 正の向きの円周の数から負の向きの円周の数を引いたものと定義します. この  $\tau(s)$  と円周の個数は, mod 2 で合同になります\*34. そのため

$$J(D) = \sum_s (-A^3)^{-w(s)} A^{\sigma(s)} (-1)^{|s|} A^{-2\tau(s)} = \sum_s (-A^3)^{-w(s)} A^{\sigma(s)} (-1)^{\tau(s)} A^{-2\tau(s)}$$

となります.  $(-2)$  乗の 2 の符号がそのまま生きるように  $\tau(s)$  を決めています. 選び方によっては  $A^{-2\tau}$  ではなく  $A^{2\tau}$  にしてもいいんですが, そうすると後ろの方で, ホモロジーという概念がコホモロジーになったりするとかいうのが逆になって, 数学的に嫌だなと思うところがあるので, このようにしています. 人によっては, 円周の向きの代わりに + とか - とかいうラベルを書いておくと, 分かりやすいかもしれません.

ちょっと非自明な変形をします. 実は  $A$  というのが, いわゆる「量子化」と呼ばれる概念に使われるパラメータ  $q = A^{-2}$  とちょっとだけ違うものですから,  $q$  に合うように変形をしておきます.

$$\begin{aligned} J(D) &= \sum_s (-1)^{-w+\tau(s)} A^{-3w+\sigma-2\tau} = \sum_s (-1)^{-w+\tau(s)} (A^{-2})^{w+(w-\sigma)/2+\tau} \\ &= \sum_s (-1)^{-w+\tau+w+(w-\sigma)/2+\tau} (-A^{-2})^{w+(w-\sigma)/2+\tau} = \sum_s (-1)^{(w-\sigma)/2} (-A^{-2})^{w+(w-\sigma)/2+\tau} \end{aligned}$$

何故こうなるかということ  $(-1)^{2\tau}$  が消えてしまうからです. それから細かいことを言うと, この  $-w$  が  $+w$  になってもいいです. 通分したときに  $3w - \sigma + 2\tau$  というのが見えれば, この変形ができたことになります.

最後にこの式変形から,

$$J(D) = \sum_s (-1)^{i(s)} q^{j(s)} \quad (q = -A^2)$$

として, 幾何的な形から決まる量  $i(s), j(s)$  を決めます. すなわち

- $i(s)$  は,  $w(s)$  を用いて  $i(s) = \frac{w(D) - \sigma(s)}{2}$  と定義されます.
- $j(s)$  は  $j(s) = w(D) + i(s) + \tau(s)$  と書いてもいいですし, 同じ事ですが  $\frac{2w(D) - \sigma(s) + 2\tau(s)}{2}$  というように  $i$  に依存しない形で定義してもいいです. 好みが分かります.

Jones 多項式というのは実は, 状態を細かく見ていったものから何かしらこの  $i$  とか  $j$  とかいう数を使って項を作り, それを全部足し上げて決めて, さらにここに  $-1$  が入って交代和\*35になったものと思えます.

\*33 さっきの  $\delta^2 = (-A^2 - A^{-2})^2$  を展開する例を思い出してください. 細分化する前の状態に関する和だと  $\delta^2$  にしかありませんが, これを展開して  $A^4 + 1 + 1 + A^{-4}$  と書くと, 細分化された状態に関する 4 項の和に見えるのでした.

\*34 正の向き, 負の向きの円周の個数をそれぞれ  $\tau_+, \tau_-$  とすると,  $\tau(s) = \tau_+ - \tau_- = (\tau_+ + \tau_-) - 2\tau_- = |s| - 2\tau_- \equiv |s| \pmod{2}$  です.

\*35 + の項と - の項が交互に現れる式のことで.

$q$  は由緒正しい量で、Planck 定数の 0 になる極限で 1 になるもの<sup>\*36</sup>として設定されるので、物理的なものです。他は数学です。

■質問 1つのダイアグラムに対して、 $i$  や  $j$  というのは直感的に説明できるものなんですか？

——僕は、直感的には分からないかなと思います。たとえば三葉結び目に対して  $i$  や  $j$  の最大値がどのようになるかは、全く非自明です。ダイアグラムを見てぱっと分かる量ではなく、この式変形から出てくるものです。それを分かりやすく「ホモロジーというものを变形しましょう」としたものはあって、それは見るとすぐ分かります。種数というもので書かれます。

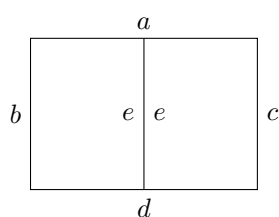
## 3.2 Khovanov ホモロジー

■Abel 群 ここまで来ると、いよいよベクトル空間というものを知っていることにしなければなりません。そんなに恐ろしいものではないんですが（書くとき恐ろしいんですけど）全く怖くありません。今日は、 $1+1=0$  となる世界なのでちょっと怖い感じがするんですが、この方が後で出てくる話が簡単になるので、そうしています。

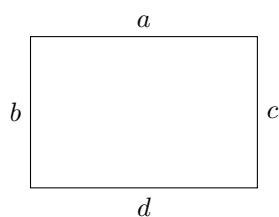
集合  $S$  が Abel 群ということを定義しておきます。 $S$  が Abel 群とは、まず  $S$  に足し算の構造が入っていて、次を満たすことです。

- (1)  $S + T = T + S$  足し算が交換する。
- (2)  $(S + T) + U = S + (T + U)$  足し算の仕方の順番は変えても良い。
- (3)  $0 + S = S = S + 0$  0 という元が存在して、どんな物と足しても結果が変わらない。
- (4)  $S + (-S) = 0$  任意の元  $S$  に対し逆元  $-S$  が存在し、 $S + (-S) = 0$  となる。

今回はしかもすごく簡単で、2つ足したら 0 と決めてしましましょうというわけです。この意味を説明しておきます。長方形みたいな図形があったとき、分割したいときがあります。辺にラベルが貼ってあったとしましょう。

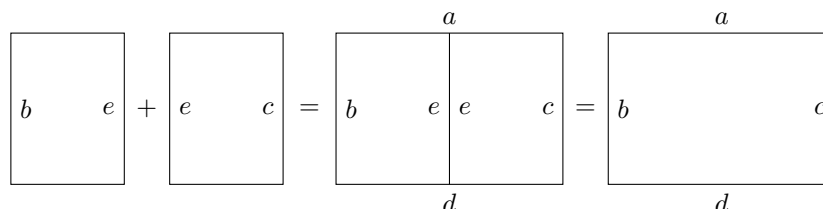


一方これに対して分割をしなかったときのシートがあります。



<sup>\*36</sup> Planck 定数  $h$  の現れる文脈では、 $q = e^h$  です。

この  $e$  と  $e$  というのは、左のシートと右のシートを足したら、本来消えてなくなってほしいものです。なので、なんとなく  $e + e = 0$  となってほしい。これはたとえ話なんですけど、こういう構造というのは入って欲しい。



[注意] 先生方にはこんな話をしてごめんなさいという感じです。要するにホモロジー群を取りたいという気持ちから来ています。2つ足して消えて欲しい場合に、こういう構造を入れたりします。

■ホモロジー群 何を考えるかという、 $i(S)$  というものが  $S$  によって決まるんですけど、 $i$  という固定された数だけを持つものを考えます。 $j$  についても  $j(S) = j$  を満たすものだけを集めます。こういう細分化された状態  $S$  の集合を考えます。

$$C^{i,j}(D) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\{S \mid i(S) = i, j(S) = j\}]$$

この係数が嫌ですが、一応定義をします。集合  $S$  に対して、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[S]$  とは、 $S$  が Abel 群で  $s + s = 0$  となるものです<sup>\*37</sup>。何か足し算が入った数の集合を考えているんですけど、役者は全然複雑ではなく、いまは結び目の絵から決まった、細分化された状態しか出てきません。それを足したり引いたりすることを考える。だけど今はもっと簡単に、2つ足したら 0 とするので、引き算すらない<sup>\*38</sup>ようなすごく簡単な集合を考えています。引き算がないというのはどういうことかという  $1 - 1$  も  $1 + 1$  も 0 ということです。

■質問  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[S]$  は  $S$  の部分集合全体ですか？

——はい。集合としては、 $S$  の部分集合全体を持ってきたものと一致します。

この集合  $C^{i,j}(D)$  に対してさらに、オペレーション  $d$  というものを入れていきます。これは  $j$  を止めて  $i$  を 1 個だけ増やす写像（関数の一般化）で、 $d: C^{i,j}(D) \rightarrow C^{i+1,j}(D)$  と書かれます。

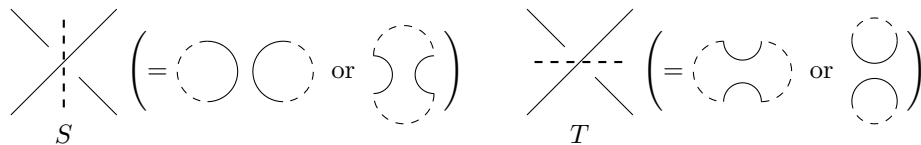
これを一番簡単に理解するにはどうするかというと、記法を定義します。左回りにしていたものを 1, 右回りのものを  $x$  と表します。



こうしておいて、ある交点 1 つだけ壊し方を変えます。壊し方はマーカ—といって、その対に沿って壊す。左右に開くのと上下に開くのとを、このように線で書いておきます。そして縦に壊す方を  $S$ , 横に壊す方を  $T$  として、細分化された状態というものを  $T$  という記号を使って書いてみます。するとどんな感じになるかというと、次のような場合しかないことが分かります。

<sup>\*37</sup> 慣れないと記号が見つらいですが、この式は「 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  と  $[S]$  がくっついている」と見ます。そして  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  は 0 と 1 からなる集合で、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[S]$  は「 $S$  の元に  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  を係数で付けて、足し算を形式的に考える」という意味です。

<sup>\*38</sup> 「2 で割った余り」で整数を考えると、 $2 = 0$  となります。この両辺から 1 を引くと  $1 = -1$  となるので、引き算は足し算と同じになります。



点線で書いているところは「繋がっていますよ」という意味です。嫌な人は放物線でぐっと繋げてしまってもいいです。で、これを見たときに、1 交点だけ壊し方を変えろとしてください。このときラベルの行き先を全部書いてみます。ベクトルとか書きたくなるのですが、ぐっと我慢をして書きます。 $(x, x)$  ペアは 0,  $(x, 1)$  ペアは  $x$  に行きます。 $(1, x)$  は  $(x, 1)$  の 180 度回転だから同じ  $x$  に行き、 $(1, 1)$  は 1 に行きます。

$$\begin{array}{ccccccc} \text{circle with } x \text{ and } x & \mapsto & 0, & \text{circle with } x \text{ and } 1 & \mapsto & \text{circle with } x, & \text{circle with } 1 \text{ and } x & \mapsto & \text{circle with } x, & \text{circle with } 1 \text{ and } 1 & \mapsto & \text{circle with } 1 \end{array}$$

縦に壊す方も行き先を書いてみます。 $x$  と 1 の行き先がそれぞれ

$$\begin{array}{ccc} \text{circle with } x & \mapsto & \text{circle with } x \text{ and } x \\ \text{circle with } 1 & \mapsto & \text{circle with } x \text{ and } 1 + \text{circle with } 1 \text{ and } x \end{array}$$

です。縦に書いたラベルと横に書いたラベルは、それぞれこの円周のところに書き込むような形になります。そうすると、全てのパターンが決まります。

この肝は何かというと、実は  $j$  を動かしていないということに思い至るわけですね。たとえば  $x$  と 1 だったら、元の回転数の和は  $+1$  と  $-1$  で 0 で、これを 1 個の  $x$  に押し込んで  $\tau$  を  $-1$  している。ですけど、先ほどやったように、縦で壊すと  $A$ 、横で壊すと  $A^{-1}$  がかかるのが大事なところ。もしくは上の式変形を見て、 $i$  というものが 1 個だけかわると、 $\tau$  というものも 1 個だけ増えることが見てとれます。そこで帳尻が合うわけです。だから  $(1, x)$  の行き先で  $j$  は  $-1$  と 1 で変化しないわけですが、 $i$  は 1 だけ増えている。式を眺めて  $i(S)$  と  $j(S)$  を眺めると、このことに思い至る。そのようにして作っていきます。 $j(S)$  が変わらないようにして、 $i(S)$  だけ 1 増えるように作る。

[注意] 先生方に申し上げますと(可換) **Frobenius 代数**というのがあって、その構造が TQFT と 1:1 に対応しているものですから、その由緒正しい構造から導き出されるということになります。初等的に試してみると、このようにして作られることになります。

■Khovanov ホモロジー このペアを書いたので、 $d^i(S)$  を次のように作ります。 $(S, T)$  ペアというのは数学的にあまり厳密な書き方じゃないんですが、さっきのリストに載っているものとしてください。これで

$$d^i(S) = \sum_{(S, T)} T$$

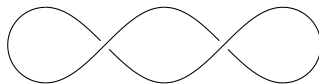
とします。 $1 + 1 = 0$  のケースで作っていますが、本当は整数係数で作られます。その話をすると長くなってしまいますので、ここでは一番簡単なバージョンをやります。

これは  $d^{i+1} \circ d^i = 0$  を満たす。この証明は非自明です。たくさんの場合分けをしなければなりません。こういった構造があると、ホモロジーという概念が出てきます(これは  $i$  が上がるのでコホモロジーというもののなのですが)。  $H^i(C^{*,j}(D), d)$  と書かれる Abel 群(足し算の入った集合)が取れます<sup>\*39</sup>。これが **Khovanov ホモロジー**というものです。

<sup>\*39</sup>  $H^i(C^{*,j}, d)$  の定義は後で出てきます。

■質問 どれくらい場合分けをするんですか？

——2通りの交点の交わり方を全部考えます。それだけです。大きく分けると5通りなんですけど、5通りに  $x$  と 1 のラベルの貼り方が出て計算の場合分けが増えてきます。たとえば正の交点・負の交点が



のように繋がっている場合、仕方が無いので  $(x) \curvearrowright (x) \curvearrowright (x)$  と取るなど8通り。そういった計算を全部します。ですがテンソル積というありがたいものを使うと、そんな難しくもないということになります。

■質問 これは  $i$  が増えるからコホモロジーじゃないんですか？

——それは非常に重要な質問で、最初コホモロジーと呼ばれていました。ですが、ある「関手性」というものを考えると、ホモロジーと言った方が良いのではないかとなりました。  $C$  を違う  $C'$  に対応させる関手と呼ばれる概念があって、それと逆向きの対応ができる「反変」というときにコホモロジーというんですね。しかし Khovanov ホモロジーはそのまま同じ向きに対応させ、双対を取ってるわけではないので、ホモロジーと呼ぼうということで落ち着きました。共変関手ですから「みなさんホモロジーとしましょう」となりました。

■質問 ホモロジーにするなら添字が下の方が自然じゃないですか？

——えーとですね、まず数学的理由ではないかもしれませんが、Khovanov 先生が最初に発見したとき上に付けてた<sup>\*40</sup>というのがあります。

数学的には、さっき考えたブラケット多項式というのが実は、今の式変形（つまり Jones 多項式でやったのと同じ計算）をすると、 $i$  が一つ下がる方になります。まさにホモロジーです。しかし Jones 多項式を作るとき、補正して係数を変えましたよね。そのせいでコホモロジーになっちゃいました。そればかりはどうしようもありません。

ある categorification の専門家は「次数を全部マイナスにすればいいじゃないか」というお話をなされましたが、それは偉い先生達に恐れ多いのでやめました。でも誰かがやり出せば、多分そうなると思います。

いよいよ Khovanov の定理を書きます。先ほど Jones 多項式を考えたとき同じく、 $D_K$  には向きが付いています。 $H^{i,j}(D_K)$  が  $D_K$  に依らないので、トポロジー的な不変量を与えます。これは 2000 年に Duke Mathematical Journal という雑誌に掲載されました。

**定理 3** [Khovanov2000]. 結び目  $K$  から 1 つ選んだ正則射影図  $D_K$  の  $H^{i,j}(D_K)$  は、 $D_K$  の取り方に依らない。よって、これを  $H^{i,j}(K)$  と表して良い。そしてこのとき

$$J(K) = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim H^{i,j}(K)$$

が成り立つ。

<sup>\*40</sup> [Khovanov2000]

実は Jones 多項式の係数は、符号を除いて、ある空間の次元になっている。これを  $q^j$  にかけて符号を付けて足し合わせる。このように、Jones 多項式が一般化されているんです。

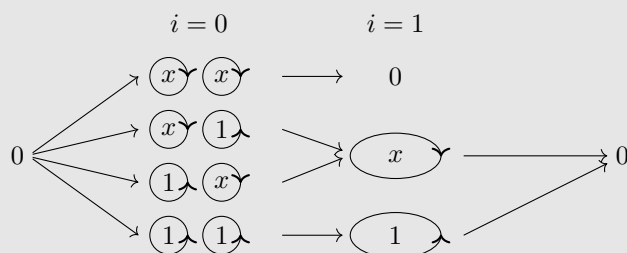
[注意] 「 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  係数で dim って書いていいのですか？」って思うかもしれませんが。本当は rank と書くべきで、専門家でも注意して rank と dim を使い分けています。組合せ論の人は「dim と書いても紛れがないじゃないか」と dim を使ったりするので、今日は dim を使いました。自由な生成元の個数を dim としておきます。分野によっては rank と書くことが多いです。Abel 群の基本定理から rank というものが決まります。 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  係数だから rank の意味についても色々言わなきゃいけないのですが……今日はちょっと省略します。

この様子を、ほどけた結び目でどうなってるか計算してみましょう。1 個しか交点がないんですが、それでも十分な場合に分かれます。

例 4. 交点数 1 の次の結び目を考えます。正の交点が 1 個だけあるので  $w = 1$  です。



$i = 0$  のときは、 $1 - 1 = 0$ 。  $i = 1$  のときはまた違う感じの図が出ます。さっきの図とにらめっこしますと、掛け算をしてやると  $(x)(1)$  が  $(x)$ 、 $(1)(x)$  が  $(x)$  に行き、 $(1)(1)$  が  $(1)$  になります。 $(x)(x)$  は 0 です。なんで 0 になるんですかという先ほどの「 $j$  を保って  $i$  を増やす操作がない」からです。とにかくにも、居ないところは 0 です。



このホモロジー群を計算すると、どんな形になるでしょうか？たとえば 0 にいったりする元は生き残るわけです。 $(x)(1)$  と  $(1)(x)$  は両方とも  $(x)$  にいて、 $(x)$  は 2 つ足したら 0 になる。だから、 $(x)(x)$  と  $(x)(1) + (1)(x)$  が生き残ります。この  $(1)(1)$  は消えないので出てこない。だからこれはいなくて、2 つ生き残ります。空間としては、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[(x)(x)] \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[(x)(1) + (1)(x)]$  となる。こうすると代数っぽくなります。

$j$  がどうなっているかという、速く計算するには  $j = w + i + \tau$  の方がよいですね。 $(x)(x)$  のときは  $j = 1 + 0 - 2 = -1$ 。次に  $(x)(1) + (1)(x)$  に行きますと、やっぱり  $i = 0$  なので、今度は  $1 + 0 + 0 = 1$ 。前者が  $H^{0,-1}(\infty)$ 、後者が  $H^{0,1}(\infty)$  という不変量になります。次元はどちらも 1 です。

実際に Jones 多項式を計算すると  $J(\infty) = J(\bigcirc) = q^{-1} + q$  となり、次元にあたる 1 と 1 が出てきています。すごく特別な場合なんですけど、計算がチェックできたことになります。

$$J(K) = \sum_{i,j} t^i q^j \dim H^{i,j}(K)$$

これは耳にただけなんですが、基本的にはこうしたトポロジーで連続変形で動かないものを、物理の人は物理量と見ます。だから物理の人は、ホモロジー群のような代数構造が入ったものというよりは、多項式を見ることを求めます。そして、3回足して0になるとか4回足して0になるとか一般化したものがあつたとしても、たまたま2つの粒子が重なって見えているようなものだと思います。「あくまで物事が潰れて見えているだけで実は1:1に対応していて十分拡張したら見えるという考え方なんです」とおっしゃっていました。だからトーションと言われる数学的に潰れたものがあつたら「それは数学が十分広がっていないせいであり、物理量にはもう少し自由度があつて、まだ十分に一般化されていない」と考えるみたいなんです。ここまで十分拡張してきてはいるんですが、

コバノフは、英語読みです。ご本人は「英語ではコバノフで構わない」という感じでおっしゃるのですが、ロシア語で Kh が「ホ」にあたるので、なるべくホバノフと呼んでいます。最初は大体の人がコバノフと呼んでいましたが、最近ではホバノフと呼ぶのが一般的になりました。

■**チェイン・ホモトピーの構成** さらに不変性について、ちょっとくらい言っておいた方がいいと思います。 $D_K$  の取り方に依らないことを示すには、type I の変形で不変なことをいって、さらに type II, type III でも変わらないことをいいます。ねじれたものを  $D'$ , それを RI でほどいたものを  $D$  とすると、次のような  $\rho_I$  という写像が出てきます。

$$\rho_I: C^{i,j}\left(\bigcirc\right) \rightarrow C^{i,j}\left(\bigcirc\right)$$

$$x \bigcirc x \mapsto x \bigcirc x, \quad 1 \bigcirc x \mapsto x \bigcirc 1 + 1 \bigcirc x, \quad \text{他} \mapsto 0$$

学生さん向けにいうと何か  $D'$  という、ホモロジーを取るときに潰れてしまうパートがあります ( $C(D') = C' \oplus C_{\text{contr}})^{*41}$ 。これがはっきり分かれる直和というものなんです。先ほど  $d$  というのがあったんですが、それを適用しても変わらない空間というのがあって、分割されていることが示せます。それにこの  $\rho_1$  というのを当てる。すると「片割れ  $C'$  だけ生き残ります」ということが証明されて、これは同型  $\psi$  というもので一回ひねりを取ったものに移せます。「そういったものを構成すると何が良くなるんですか」というと、ここから  $C(D') \rightarrow C \rightarrow C(D) \rightarrow C' \hookrightarrow C(D')$  という写像が作られます。これを別の見方をすると、全く変えていない恒等写像  $\text{id}$  というものとホモロジートで同じになります。

$$\begin{array}{ccccc}
C(D') & \xrightarrow{\quad \text{id} \quad} & C(D') \\
\rho \searrow & & \nearrow \text{incl} \\
C' & \xrightarrow{\psi} C(D) \xrightarrow{\psi^{-1}} C' & 
\end{array}$$

24

こういったことを示すには何を言えればいいかというと、 $h \circ d + d \circ h = \text{id} - \text{incl} \circ \rho$  ということを示せばよい。これは頑張って直接示します。  $h$  は何かというと、 $h$  は 1 つ  $i$  を戻すんです。

そうしますと  $h$  は上の式を満たします. すると, ホモロジー群というのは行き先で作った Abel 群というものでりになってしまうものの前で割っていることから, それを保つように写してくれると保証してくれます.

■RI 不変性に寄与するチェイン・ホモトピー 実はこれはちゃんとした業績になっておりまして、 $\rho_1$  と  $h_1$  というのは Oleg Viro という人が見つけてきました. Khovanov 先生が全く別のアプローチで RI 不変性を示している一方、Viro 先生はこのような「分配関数から Jones 多項式を作る」とでも言えるようなやり方で Khovanov ホモロジーを構成しています. そこでは次のようにしています. これは 2004 年です.

まず type II に対する  $h_{\text{II}}, \rho_{\text{II}}$  を与えましょう.  $h$  は次のようにします.

25

レトラクション  $\rho$  はもう少し激しくなります．次の図で  $p, q$  というのは、 $x$  か 1 のどちらかです．潰れた complex を書くために対へ方向をつけなきゃいけないくて、このようなものを考えます．

$$\rho_{\text{II}}: p \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} q \mapsto p \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} q + \begin{array}{c} p:q \\ \diagup \\ | \\ \diagdown \\ q:p \end{array} 1, \quad \begin{array}{c} p \\ \diagup \\ | \\ \diagdown \\ q \end{array} x \mapsto p:q \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} q:p + \begin{array}{c} (p,q):(q,p) \\ \diagup \\ | \\ \diagdown \\ (q,p):(p,q) \end{array} 1, \quad \text{他} \mapsto 0$$

### 余談

2009 年当時、この分野では激しい競争がありました．ジャーナル投稿に関して悲劇的なことが容易に起こりえてしまいました．当時この分野をやっていた人は、本当に、切ない思いをした人がたくさんいたのではないかと思います．皆さんは、そういったところの競争に直面しなければならないときが来るかもしれないので、一言申し上げました．

いずれにせよ、充分一般化してこれを出せばよかったのかもしれませんが、当時それだけの余裕が中々無かったというのが正直なところです．たとえば同じ年でも早いほうに出なきゃいけないというのがあって、それでも出版がずいぶん遅れたりして……．

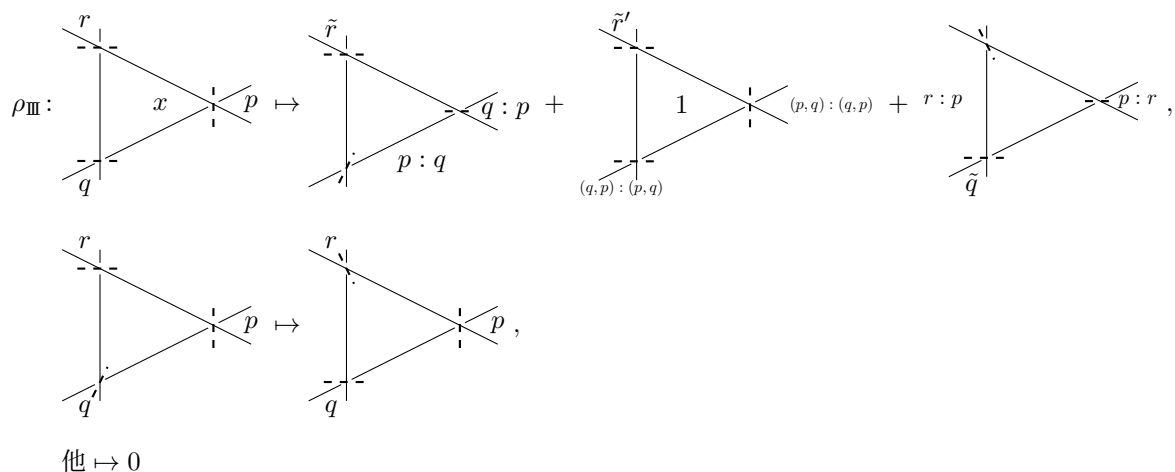
本質的にはどちらの式も同じで「関数  $d$  を適用したときにちゃんと閉じてますよ」という要請から出てきます．さらに、切り口が細分化された状態から現れるので、そういうところから情報を得て chain homotopy map を構築していくわけです．

$h_{\text{III}}, \rho_{\text{III}}$  には、このような式があります．

$$h_{\text{III}}: \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} 1 \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array}, \quad \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} x \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array}, \quad \text{他} \mapsto 0$$

$$\rho_{\text{III}}: \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array},$$

$$\begin{array}{c} r \\ \diagup \\ | \\ \diagdown \\ q \end{array} p \mapsto \begin{array}{c} r \\ \diagup \\ | \\ \diagdown \\ q \end{array} p + \begin{array}{c} \tilde{r} \\ \diagup \\ | \\ \diagdown \\ p:q \end{array} 1 \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \\ q:p \end{array},$$



type II では高々  $18 \times 18$  くらいのそういう図を考えればいいんですが、type III を考えるときは  $54 \times 54$  の行列とかを考えなくてはいけなくなってしまいます。サイズが  $54 \times 54$  なので、細かい 5mm 単位とかのマスが入ったシートの中で出来るだけ大きいのを買ってきて、それを 1 マス 1 マス埋めていくというのを最初はやりました。また Asaeda さん、Przytycki 先生と Sikora さんという方が、曲面と区間の積に入っている結び目に対して Khovanov ホモロジーを拡張しました<sup>\*42</sup>。その場合にも全く同じ式  $h$  が適用できることも、論文で示しました。

定理を書いておきます。

**定理 6** [Ito2011, Section 2]. Viro による  $\rho_I$ ,  $h_I$  の構成と同様、 $H^{i,j}(D_K)$  の不変性に寄与する  $h_{II}$ ,  $h_{III}$ ,  $\rho_{II}$ ,  $\rho_{III}$  が構成できる。また  $h_{II}$  と  $h_{III}$  は  $K \subset \Sigma \times I$  の場合の  $H^{i,j}(D_K)$  に適用される。

## 余談

非常に近い学年に開成出身の長尾さん<sup>\*43</sup>という人がいました。長尾さんは、幾何学的表現論に造詣が深く、その上幅広い知識を有した方でした。物理系の先生（山崎雅人先生）と共同研究を進め、結果的に結び目の体積予想（村上斉先生-村上順先生）へ近づく、専門家も期待するような業績（長尾-寺島-山崎）を残しております。当時、近くにいた同世代の私たちは大きな刺激を受けたものです。

また、数学の合宿等と一緒に寝泊まりをした際、卓越した見識や慧眼に、これはとてもかなわない、ともに競ったのでは勝負にはならない、そういう人だと感じたことを思い出します。

<sup>\*42</sup> [Asaeda-Przytycki-Sikora2004]

<sup>\*43</sup> 長尾健太郎 (1982-2013) は、開成高等学校を 2001 年に卒業した、日本の数学者です。胞巣状軟部肉腫という難病により 31 歳という若さで逝去され、多くの開成関係者、多くの数学者がその早すぎる死を悔やみました。現在では長尾さんを記念し、算数オリンピックに「長尾賞」という特別賞が設立されています。また今でも名古屋大学多元数理科学研究科のサーバ上に、長尾さんの「こんにちは！長尾です！」という web サイト <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kentaron/> が残っており、生前の仕事を見ることができます。

■**定理の応用** 実はこれをやった当初は、既に示された定理の単なる再証明だから「何の意味があるんですか？」という話がありました。ですが嬉しいことに、2014 年になって応用がありました。何があったかというと、2014 年に Audoux という人が量子情報、特に量子 code に応用されました。エディターは河野俊丈先生ということです。それは何かというと、Khovanov さんはさっき言ったように、うまく潰れてしまう部分集合を先に割って証明しているんです。それは非常に clever なやり方なんですけど、量子情報理論というのは、どうしても古典を見るだけでは書けない基底、全ての基底を書き尽くす状況を見せなきゃいけません。そこで「Khovanov さんの証明ではできないけど、Viro 先生と僕の  $\rho, h$  を使えばできます」という論文<sup>\*44</sup>を書いてくれて、やっと役に立ったところがあります。僕もすごくびっくりしました。

Milnor 予想とかには手が届きませんでしたけど、切りがよいので、ここで終わりにします。

## 4 質疑応答

■**質問** いま圏論化でホモロジー作ったじゃないですか。たとえば Jones 多項式に関しては、鏡映を取る操作と  $t$  を  $t^{-1}$  に置き換える作用で不変だとかっていう性質がありますよね。そうしたものがホモロジーで見えたりするんでしょうか？

——  $t$  を  $t^{-1}$  に置き換えたのと同じような感じなんですけど、 $j$  が  $-j$  になります。残念ながら Khovanov ホモロジーでは、ミュータントな結び目というペアがあって。実は Jones 多項式で区別できなかったものは、ある local な変形に関しては一致してしまい区別しないことが言えたりするんです。

Kauffman ブラケットって、縦や横の軸に関する回転で対称なんです。なので Jones 多項式については基本的に、そういった回転で対称な図形というのは、とても複雑になっても区別しないという性質があります。似たようなことが Khovanov ホモロジーでも成り立つと言ってたりして、そのところは名前だけ「ミュータント」と紹介しますが、結び目のミュータントなペアについては Jones 多項式と  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  係数の Khovanov ホモロジーで区別されない。これは Stephen Wehrli さんが示しています<sup>\*45</sup>。

この Wehrli さんは同世代の人で、色つき Jones 多項式の圏論化についてもすごく争いました。でもすごい難しい問題で、二人とも当時理想とされた形では解けなかったもので、何故か仲がいいんです。

一方 Khovanov 多項式が Jones 多項式より真に強いということは、Khovanov さんじゃなくて Bar-Natan 先生と Wehrli さんが独立に言ったんじゃないかと思います。たとえば  $5_1$  と  $10_{132}$  という例<sup>\*46</sup>があったりします。

■ **定理 7** [Bar-Natan2002].  $J(5_1) = J(10_{132})$  だが、ある  $i$  に対して  $H^{i,j}(5_1) \neq H^{i,j}(10_{132})$  である。

何年か覚えていないんですが、Wehrli さんもそのようなペアを見つけています<sup>\*47</sup>。これらが local な変形で移り合うかということ実はちょっと分かっていないので、どういったときに Jones 多項式より強くなっているかについては、これから研究されます。

<sup>\*44</sup> [Audoux2014, Theorem 2.3 & Remark 2.3]

■質問 いまの  $10_{132}$  に対する Khovanov ホモロジーや Jones 多項式って、どうやって計算したんですか？  
 ——Khovanov ホモロジーの方は、計算するプログラムを書いたという論文<sup>\*48</sup>があります。Jones の方は何をやったのか…？交点の状態数だけ考えても  $2^{10}$  で、Khovanov ホモロジーに至っては 1 とか  $x$  とかが付いて…。レトラクションで潰したときの関係式とかを Bar-Natan 先生は先に入れて、何となく一致しているところは消してしまう。そうするとスマートにこうした計算ができる、といったことを工夫されています。

■質問 そもそも Kauffman が状態和を考えたんですよ。それがこんなに発展するということは、Kauffman が何かパースペクティブを持っていないと、こういう再定義の仕方を思いつかないんじゃないかと感じたりするんですけど。元のダイアグラムを切って  $A$  とか  $B$  とかマーカーをつけるところを行列と思うべきだというのも、結局、構造がすごい上手くいっていたからですよ。それは、専門家の人にははじめから見えていた感じなんですか？

——いやー、どうなんでしょう。Kauffman はむしろ Tait 予想<sup>\*49</sup>というのを解くため、最小交点数を交代結び目というクラスに対して決定するとき、ブラケット多項式を導入しています。「そういった minimum なものを捕まえるには、Jones 多項式の最大次数と最小次数の差を取る」というのが、Kauffman ブラケットを定義した論文に書いてあります<sup>\*50</sup>。ですけど、まさかここまで発展するというのは、見えていたとはちょっと僕には思えない。あまりにも上手くいっている。Bar-Natan 先生は、「Kauffman ブラケットに感謝する」と論文の最初に書いていたり<sup>\*51</sup>します。むしろ Khovanov さんの師匠の Frenkel 先生が、こういった Frobenius 代数の構造が見えていて、そういったことをちゃんと見抜いていたのかなあ。

あとはやはり、3次元や4次元のインスタントン理論。そちらの方が先に Chern-Simons 理論としてあって、対応するもの、つまり「dimension を数えてトポロジカルな不変量が出ることがあるんじゃないだろうか」という期待・見方<sup>\*</sup>があって、そういうのが出てきたのかなと思っています。

<sup>\*45</sup> [Wehrli2010]

<sup>\*46</sup> ここで  $5_1$  や  $10_{132}$  は、結び目カタログ [Rolfsen2003, Appendix C] に掲載されている結び目の番号です。大きい数字が交点数で、下付き添字が「その交点数の中で何番目か」を表しています。以下に [Rolfsen2003, Appendix C] の図を引用します。



<sup>\*47</sup> [Bar-Natan2002] では、Wolfram Mathematica で書かれたプログラムを使い、Khovanov ホモロジーと Jones 多項式を直接計算しています。これに対し [Wehrli2007, Theorem7] の議論は間接的です。2つのトールス結び目を材料として上手く作られた2種類の絡み目に対し「ミュータントな対だから Jones 多項式が一致すること」と「Poincaré 多項式を計算すると、Khovanov ホモロジーが一致しないこと」を示しています。

<sup>\*48</sup> [Bar-Natan2007]

<sup>\*49</sup> カタカナで書くと「テイト予想」になってしまうのですが、代数幾何学で有名な Tate 予想とは別物です。

<sup>\*50</sup> [Kauffman1987, Proposition 2.9]

<sup>\*51</sup> [Bar-Natan2007] の冒頭に「我々に  $\times \mapsto A(\times + A^{-1}\times)$  を与えし Lou Kauffman へ」と書いてあります。

## 5 参考文献

- [Alexander1928] James W. Alexander, Topological invariants of knots and links, *Transactions of American Mathematical Society* **30** (1928), pp. 275–306.
- [Asaeda–Przytycki–Sikora2004] Marta M. Asaeda, Józef H. Przytycki and Adam S. Sikora, Categorification of the Kauffman bracket skein module of  $I$ -bundles over surfaces, *Algebraic & Geometric Topology* **4** (2004), 1177–1210. / arXiv:math/0409414 [math.QA]
- [Audoux2014] Benjamin Audoux, An application of Khovanov homology to quantum codes, *Annales de l’Institut Henri Poincaré D* **1** (2014), pp. 185–223. / arXiv:1307.4677 [cs.IT]
- [Bar-Natan2002] Dror Bar-Natan, On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial, *Algebraic and Geometric Topology* **2** (2002), pp. 337–370. / arXiv:math/0201043 [math.QA]
- [Bar-Natan2007] Dror Bar-Natan, Fast Khovanov Homology Computations, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* **16** (3) pp. 243–255 (2007). / arXiv:math/0606318 [math.GT]
- [Clark1978] Bradd E. Clark, Crosscaps and knots, *International Journal of Mathematics and Mathematical Science* **1** (1978), 113–123.
- [Fox–Artin1948] Ralph Fox and Emil Artin, Some wild cells and spheres in three-dimensional space, *Annals of Mathematics* **494** (1948), pp. 979–990.
- [Kauffman1987] Louis H. Kauffman, State models and the Jones polynomial, *Topology* **26** (3) (1987), pp. 395–407.
- [Khovanov2000] Mikhail Khovanov, A categorification of the Jones polynomial, *Duke Mathematical Journal* **101** (2000), pp. 359–426. / arXiv:math/9908171 [math.QA]
- [Ito2010] Noboru Ito, Construction of invariants of curves and fronts using word theory, *Journal of Knot Theory and its Ramifications* **19** (2010), pp. 1205–1245.
- [Ito2011] Noboru Ito, Chain Homotopy Maps for Khovanov Homology, *Journal of Knot Theory and its Ramifications* **20** (2011), pp. 127–139.
- [Ito2018] 伊藤昇, 『結び目理論の圏論 「結び目」のほどこき方』(日本評論社, 2018)
- [Ito–Takimura2018] Noboru Ito and Yusuke Takimura, Crosscap number and knot projections, *International Journal of Mathematics* **29** (11) (2018), 267–287.
- [Polyak2010] Michael Polyak, Minimal generating sets of Reidemeister moves, *Quantum Topology* **1** (2010), pp. 399–411 / arXiv:0908.3127 [math.GT]
- [Reidemeister1927] Kurt Reidemeister, Elementare Begründung der Knotentheorie, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **5** (1927), pp. 24–32.
- [Rolfsen2003] Dale Rolfsen, Knots and Links, AMS Chelsea Publishing (2003).
- [Viro2004] Oleg Viro, Khovanov homology, its definitions and ramifications, *Fundamenta Mathematicae* **184** (2004), pp. 317–342.
- [Wehrli2007] Stephan Wehrli, Contributions to Khovanov Homology, *Ph.D. thesis, University of Zurich* (2007). / arXiv:0810.0778 [math.GT]
- [Wehrli2010] Stephan Wehrli, Mutation invariance of Khovanov homology over  $\mathbb{F}_2$ , *Quantum Topology* **1** (2010), pp. 111–128. / arXiv:0904.3401 [math.GT]