2021 年度数学特別セミナー
位相的場の理論への誘い

(Invitation to Topological Quantum Field Theories)

述: 山﨑 雅人 */ 記: 穂坂 秀昭 †

2022 年 12 月

概要

開成学園では毎年 1 回，現役の数学者に講演していただく「数学特別セミナー」を開催しています．2021 年度は，東京大学 Kavli 数物連携宇宙研究機構（IPMU）の山﨑雅人先生をお招きし，「位相的場の理論への誘い」というテーマでセミナーをしていただきました．このノートは，その講演の内容をまとめたものです．

なお，脚注はいずれも穂坂が付け足したものです．山﨑先生にお話していただいた内容は全て本文中に含めています．また，このノートの文責は，誤りも含め，全て穂坂にあります．

目次

0 今回のセミナーの概要 2

1 数学・物理の概観 2
- 1.1 数学・物理の世界 2
- 1.2 幾何学について 3

2 トポロジー 5
- 2.1 1 次元の形の分類 6
- 2.2 2 次元曲面の分類 8
- 2.3 3 次元の形の例: 球面とトーラス 12
- 2.4 3 次元の形に関する考察 15
- 2.5 Dehn 手術 18

3 位相的場の理論 21
- 3.1 トポロジカル不変量 21
- 3.2 位相的場の理論の定式化 22
- 3.3 応用的な話題 29

4 質疑応答 31

* 東京大学 Kavli 数物連携宇宙研究機構 教授
† 開成中学校・高等学校 数学科 教諭

0　今回のセミナーの概要

物理学と数学は歴史上密接に関係しており，しばしばお互いを刺激しあいながら発展してきた．しかし，そのことを十分に感じる機会は中高ではそれほど多くないかもしれない．今回の講義では「位相的な場の理論」を例にとって，物理学からの考え方が数学の研究に活かされている様子を紹介したい．

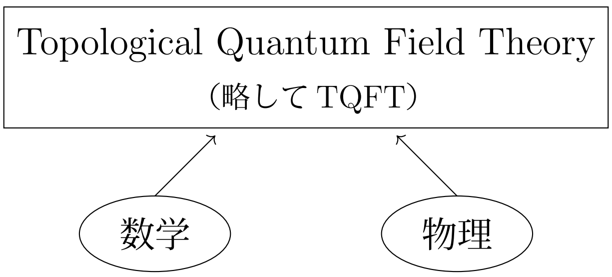
1　数学・物理の概観

1.1　数学・物理の世界

僕はいわゆる大学の先生ということになっているんですが，実は大学の先生といいつつ普段は講義をしていないという先生もどきでありまして，あまり講義をすることに慣れていません．分からないことがあったら是非，その場でもいいですし，あと質問するのが恥ずかしいという方がいたら休憩のときにこっそりとでも聞きに来ていただければと思います．

■位相的場の理論について　今日は，名前を聞かれたことがないかもしれませんが，位相的場の理論というものに関係したことを説明したいと思っています．これが何かというのを説明すること自体が講義の目的です．理論というところに「量子」をつけて位相的量子場の理論と書くこともあります．せっかくなので英語でも書くと Topological Quantum Field Theory という名前になっています．英語の人は長くなってくると面倒くさくなってきて省略することがあり，頭文字を取って，俗に TQFT と呼んでいます．名前を知ったから何か判ったというわけでもないんですが，時々癖で TQFT と言っちゃうかもしれないので書きました．

TQFT というものは何がどう面白いか．まず数学として面白い．数学というのはもちろん中学高校からあり，ここにも数学が好きな方がたくさんいらっしゃると思います．それが発展していくと色々な側面が出てきます．TQFT はその数学の一分野であるという言い方ができます．一方で，今日は数学の話を主にするんですけど，TQFT の成り立ち自体は物理学から来ているところがあります．位相的場の理論というものは，数学的な考え方と物理的な考え方とがある意味一緒くたになって入ってきている．「僕は純粋に数学に興味があって位相的場の理論をやっている」という人もいれば，「物理学に興味があって位相的場の理論をやっている」という人もいるわけです．このように，色々な違う動機を持った人々が同じものに興味を持っているというのは面白いところです．この分野を研究する色々な考え方・立場があって，それがこの話をさらに面白くしていると思います．せっかくなので今日は主に数学からはじめて，それからちょっと物理的な話を説明したい．



■数学の諸分野　位相的場の理論が何かというのを説明する前に，まずちょっとだけ遡ります．

数学には，たとえば代数学とか解析学とか幾何学などなど，色々な分野があります．色々な側面があって，数学者の中でも色々います．もちろんこういう分類というのは，世の中の色々な分類と同じでして，必ずしもこれらの間にかっちりと線が引かれているわけではありません．安直な名前ですけど，たとえば代数と解析の間の境界分野は代数解析，代数と幾何の間の境界分野は代数幾何，こういう名前で呼ばれていて，はっきり分かれているわけではありません．これ以外にも色々な分野があります．

ただ伝統的には，数学が大雑把に代数・解析・幾何という風に分けられてきたことは確かです．代数というのは何かというと，何でもいいですけどたとえば 2 次関数の式みたいなのがあったとき，$y = ax^2 + bx + c$ みたいに記号を使って何か調べる．これが代数なわけですね．解析は何かというと，皆さんが積分をやっているか分からないですけど，たとえば関数があったらそれを積分をするとか，何か量を測る．それが解析というものです．幾何というのは形を調べる．たとえば昔の Galilei が書いた，数学と物理の関係について書いた『天文対話』という本があるんですけど，そういうのを読むと「幾何というのは，具体的に丸とか三角とか四角があってこういうものを調べる」みたいなことが書いてある．これが幾何と呼ぶものになっている．だから幾何学は「形」あるいは「図形」を調べる学問ということになります．「どういう形が世の中にあるんだろうか」というのを調べるのが幾何学であるといっても，そんなに間違ってないかなと思うわけです．

数学
- 代数　2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$
- 解析　積分 $\int f(x)dx$
- 幾何　形 / 図形　○□△

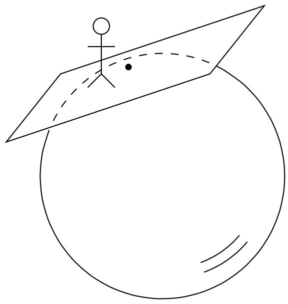
1.2　幾何学について

■幾何学の射程　じゃあ「どういう形があるか」ってことを考えます．黒板の上だけだと丸とか三角とか四角を描いてたとえば星形作ったりとかしかできません．このホワイトボードはのっぺりしていて縦横 2 方向あるから 2 次元と呼ばれていて，2 次元の上に図を描くわけですけど，人間の想像力は中々すごくて，本当は黒板の上に描けない形を考えられます．たとえばこのペットボトルは縦横高さ 3 方向あるので，それを 3 次元の図形というわけですが，幾何の方では想像力を働かせて「もっと高い次元でどうなるか」ということを考えます．だから幾何学というのは，一般には高次元かもしれない色々な次元の形を調べる学問である，という言い方がひとつできると思います．もちろん「幾何学が何か」というのは幾何学者にとって大問題でありまして，人に聞くと一人一人違う答えが返ってくると思うんですけど，こういう面白い形を調べるのが幾何学であるといってもそんなに外れてはいないと思います．

ではそうすると，形があるとしたら形についてどういう問題を解けばいいのか．数学なので，みなさんが試験を解くときと同じように，何か問題があって問題を解こうとするわけですね．ですけど，問題は先生が必ずしも出してくれるわけではなく，自分で見つけなきゃいけない．そうすると，筋の良い問題と筋の良くない問題というのがあります．中々その辺は難しいんですが，幾何学に関して典型的に調べられてきた良い問題があります．それは何かといいますと「形を分類する」という問題です．たとえばどういう図形が世の中にあるだろうかというのを分類できる．もちろん分類したからそれで終わりというわけではなくて，分類ができたらその一つ一つに面白い性質があるかもしれないからそれを調べる．そういうことをやるかもしれないんですけど，まずはそのどういう形があり得るかを調べるのが幾何学の原理です．

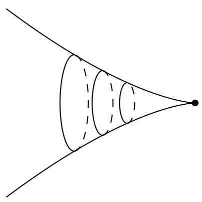
■多様体 manifold　ここで「形」というと漠然としているんですけど，数学者というのはなるべくそれを精密に定式化しようとする．今日はあまり堅苦しいことは言わないのでそんな正確な定式化はせず大雑把に言っちゃうんですが，でも「形とは何か」というのに数学的な概念があります．僕は「形」と言うと思うんですが，「多様体」という言葉を時々使ってしまうかもしれない．これは英語では manifold，多いという意味の many から来ていて，それが fold，織り込まれてる感じで manifold といいます．そういうものの分類を考えます．

manifold は何かとざっくり言います．たとえば球面を考えてみましょう．これは球，2 次元の球面です．地球儀の表面みたいなものだと思ってください．これは多様体というものの例になってます．それはどういう心かというと，1 点どこでもいいのでどっかから点を取ってきて人が立っているとしましょう．まさに地球があってそこに僕が立っている感じです．そうしたときこの人の周りを眺めてみます．



周りを眺めてみると，大体平らになっている．「平坦」というと学術っぽくなりますね．「何処で見ても大体平らに見える」というのが，この多様体という条件になっています．もちろん地球と同じです．地球というのはどこに立ってもその周りを眺めると大体平らに見えるわけですね．平らに見えるので，小さな人間にとってはそれが巨大な球かどうか分かりません．古代の人も「地球は球である」と言っていますが，本当に丸いかどうかは直接には分からないわけですね．たとえば遠くから船が近づいてくるとき，帆・マストが上の方からどんどん見えてくるとかなんとかいって，色々して，地球が球であることを頑張って知ったわけなんです．必ずしも全体が平らになっていなくていいんですけど，1 点の周りを見るといつも平らになっている．これが多様体というものの考え方です．

たとえばですね，こういう，ものすごいトキッと尖ったものは平らじゃなくなっているので，許されない．



まあトキッとしたのはトキッとしたものでものすごい面白い事があって，それを調べるのもやはり研究分野なんですけど[*1]，とりあえず今は尖ったところは考えない．だから大雑把に言えばどこにいても大体平らな，滑らかな形に興味がある．これを分類していくという問題になります．

[*1] 一例として，orbifold と呼ばれる図形があります．

■分類問題の枠組み　ところがですね，「まず分類する」って言うんですけども，分類というのは中々くせ者であります.「何をもって分類するか」という問題があるわけです.

今思いついた例え話をします．たとえば赤いリンゴと，もう一つ緑のリンゴがあったとしましょう．そうしたとき「その 2 つは同じですか？」という問があるわけですね．そうしたとき皆さんがどう答えるか分からないんですけど，答えから言うと，それは「どういう基準で区別するか」に依るわけです．たとえば「僕はリンゴに興味があります」という大きな基準を設定すれば，赤のリンゴと緑のリンゴは同じです.「赤いリンゴも緑のリンゴも両方リンゴです，でもリンゴはたとえばミカンとは違います」という分類の仕方になります．だけど，もしかしたら僕はリンゴの赤緑の色に興味があるかもしれなくて，そういう場合には赤のリンゴと緑のリンゴは別のものだと思うことになります．それは細かい分類になります．それから一番粗い分類，今の例だと「リンゴもミカンも同じだ．果物でいいじゃないか」と考えればリンゴもミカンも果物で同じということになります．これが粗い分類と呼んでいるものです．だから何かを仕分けるときに，どういう基準で何をもって同じと思うかをきちんと設定する必要があります.

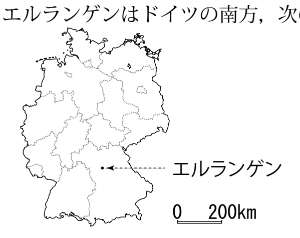
分類の仕方というのは全然一意ではなくて，形のどういう側面に興味があるかに応じて変える必要があります．そして多様体の注目する着眼点に応じて違う問題設定ができるので，違う幾何学ができるわけです．幾何学は 1 つであるわけではなくて，どういう側面に注目するかにおいて別の幾何学が出てくる．ものすごく粗いものもあるし，それから細かい分類もあります.

昔 Felix Klein という数学者がいまして，こういうことを一番系統的に言ったのは彼です．今はざっくり言っちゃってますけど，もう少しどういう構造とか幾何構造とか，形のうえにどういうものを乗せてそれを区別の条件に用いるかを調べていて，それをよくエルランゲン・プログラムと呼んでいます．エルランゲンとはドイツの地名で，ニュルンベルグからも近くです[*2]．エルランゲン大学というものがあって，Felix Klein さんがかなり若い 20 代のとき[*3]に「幾何学とはこういうものである」と提唱してました．それが全てではないですけど，ある意味，幾何学の指針となった.

2　トポロジー

タイトルが位相的場の理論となっていたので，トポロジカルという世界に入っていきます．トポロジー，英語では topology と綴りますけど，これは幾何学の 1 種類です．ざっくりいうと「滑らかに変形するもの，すなわち連続変形は区別しない」幾何学ということになります．これはある意味かなり粗い幾何学と言っても良いものです．結構こういうことをご存知なんでしょうか．トポロジーとは何か大体知ってる方いらっしゃいます？……あまりいらっしゃらない．そんなに皆さんを退屈させずに済みそうですね.

[*2] エルランゲンはドイツの南方，次の図の位置です.



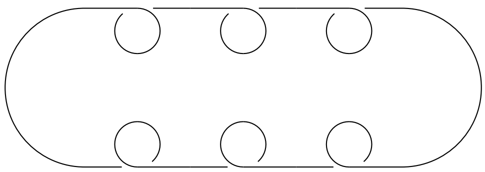
[*3] 1872 年，Klein が 23 歳のときです,『岩波数学辞典第 4 版』によれば「エルランゲン大学哲学部教授に就任するに際して，“Vergleichende Betrachtungen über neueregeometrische Forschungen（最近の幾何学研究の比較考察）” と題する論文を発表し，当時まで多方面に分化して研究されてきた種々の幾何学を，変換群の概念のもとに総合するという画期的卓見を公表した」とのことです.

「滑らかな連続変形を区別しない」というとき，ここに何となく滑らかと書いちゃいましたが，もしみなさん数学者になりたいなら，「滑らかとは何か」を定式化しないといけない．それは数学科の学生ならちゃんと知らなきゃいけないので，たとえばトポロジーに興味があったら是非，そういうことを専門的に学んで欲しいと思います．ですが今日はざっくりどんな感じか話をします．

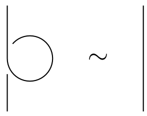
2.1　1 次元の形の分類

まず，形には次元があるわけですね．たとえばボールの表面は 2 次元あるわけですね．地球でいうと，緯度と経度．2 方向あるので，それが 2 次元の球というものなわけです．ですがせっかくなので，まずは 1 次元から出発しましょう．

■1 次元の輪っか　1 次元の形はどういう形かってことなんですけど，ルールとして，滑らかに変形しても区別しないということになっているので，たとえば，うにゃーっと線を頑張って書く．

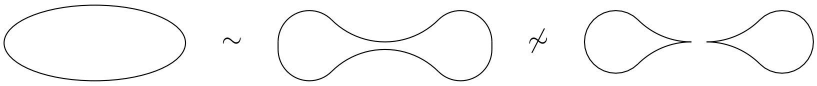


なんか線がうにゃうにゃーっとしてます．コンセントと同じで，紐があるとよく絡まるじゃないですか．置いとくと何か勝手に絡まったりする．でもこれ紐で作ってもらうとわかるんですが，ばーっと引っ張ると，何のこともない輪っかと同じになります．これだと難しすぎるかもしれないので，たとえばひもを 1 箇所だけひねる．



にょろっという記号 $\sim$ は「同じ」と言う意味です．こうやって 1 個だけひねりができちゃっても，くるっと回ると元と同じになります．これをもって「同じ」と思うわけです．ただ同じっていうのは「何をもって同じと思うか」が重要なわけですね．今の「$\sim$」は「滑らかに連続変形している」ことになるわけです．

逆に許されない変形は何かというと，たとえばこういう，輪っかをちょっとひしゃげたものを考えます．真ん中をものすごく近づけて変形してみます．

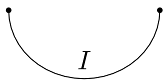


これをさらに頑張って潰していって，こんな風にぴちっとしようとしているわけですね．そうすると糸が切れちゃうんですね．こうすると同じではない．直感的にはそうですよね．真ん中でバチッと切っちゃってるわけです．今まで輪ゴム 1 個だったのが輪ゴム 2 個になっている．そういうのは違うということになります．

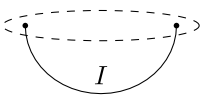
1 次元でどういう形があるかというと，実はあまりバラエティはないんですね．ものすごく複雑なものがあっても，基本的に 1 次元の形はそのものとしては円，輪っかみたいになっている．

■連結成分　もちろん輪っかが 2 個とか 3 個とかいうことはあるわけですね．たとえば輪っか 1 個と輪っか 2 個は同じではない．どう考えても滑らかには繋がらない．離れてるときはこの 1 つ 1 つを連結成分といいます．そういう繋がっていないものを考えれば色々バラエティーがあります．しかし繋がっているものを考えると，1 次元の図形というのは本質的にこの輪っかしかない．

■閉じていない図形　また輪っかを切ることはできて，こんな風にはさみで切ると線みたいなのが出てきます．線分ですので，よく英語 interval の頭文字を取って I と書きます．



これは端っこ，端点があります．幾何学ではよく境界と呼んでいる図形です．この端っこに点 p_1，点 p_2 というのがありまして，境界 ∂I というのが p_1 と p_2，線分の端の 2 点です．それを記号で表したのが $\partial I = \{p_1\} \cup \{p_2\}$ という式です．



$\leftarrow \partial I = \{p_1\} \cup \{p_2\}$

こういう多様体には端っこがあるので，I は境界付きの形，多様体です．これは「開いた形」といいます．一方輪っか，circle の C と書きましょう．C は境界なしの形です．だから境界なしの形に限定して，さらに離れたものを気にしないとすると，形は 1 個しかありません．もっと一般に，離れた境界付きの形も考えると色々出てくる．

色々と複雑な例を考え出すと，境界とは何か，何をもって滑らかというのか，そういうことが色々問題になってきます．この例くらいだと見れば大体分かる感じなんですが，そこをちゃんと定式化するというのが，数学としてはとても大事なことになってきます．

> **■質問**　ここで 1 次元の形に「端っこのない直線」，たとえば半開区間 $[0,1)$ を含めない理由は？
> —— おっしゃるとおり，形としてはそういうものがあります．そういうのをとってもいいと思います．
> もう少し正確にすると，一般に境界付きの多様体においては，その境界とそれ以外の点（内部）がセットで定まっていると考えるといいと思います．この場合，$\{0,1\}$ が境界上の点，それ以外の $(0,1)$ が内部の点です．

でも 1 次元の世界は割と退屈ですね．形自体も退屈ですし，1 次元に住むと退屈です．よく昔の SF みたいなので出てくるんですが，1 次元の世界というのは中々ややこしくて，1 次元の世界に人が住んでいたら，自分が歩いている前から自分の嫌いな人がやってきても「すみません」とすれ違えないわけですね．でも 2 次元の世界に行ったら，嫌な人が来たらすっとよけることができるわけです．そういう意味で，2 次元の世界は色々融通が利く世界なんですね．高次元に行くと色々方向が増えていくわけなので，そういう意味で世界が段々広くなっていく．

次から 2 次元に行くわけですが，それに関係して，2 次元の形はもう少し融通が利いてもうちょっとだけ多様な世界ができます．

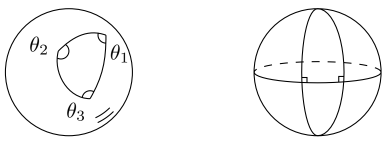
2.2　2 次元曲面の分類

2 次元に行くとどうなるか，ということを考えてみましょう．そんなに複雑になるわけじゃないんですが，もうちょっとバラエティが出てくる．実はある意味，無限個出てきます．

■2 次元球面　2 次元には何がありますかといったら，まず地球儀みたいな球．2 次元球面と呼んでいて，sphere なので S^2 と表します．数学とかの学問は一々「球面」とか書かずついつい英語で書いちゃうので，sphere の S を使います．2 次元の球面は緯度と経度の 2 次元方向があるので 2 次元です．

S^2 は色々面白いものであって，たとえばある点からある点へ移動するのにどういう経路を取ると近いか，2 点があったときにどう行けば一番距離が短いかが分かります．飛行機で旅行すると分かるんですけど，ヨーロッパに行くときはどういう風に通るかというと，シベリアの上の方を通る．なので飛行機で眺めてるとシベリアが見えます．

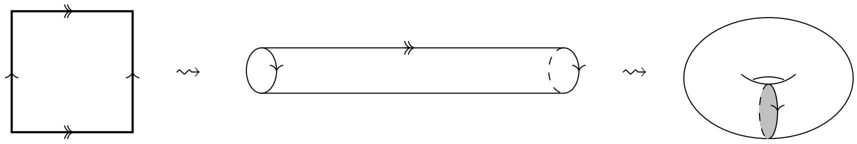
そして地球上に 3 点を取って来て，2 つずつそういう一番近い線[*4]で結ぶ．すると球面上に三角形ができる．各頂点に $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ という風に角度があるわけなんですけども，実はこの角度の和 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ というのは 180° より大きいというのが分かります．のっぺりした上，たとえば黒板の上に三角形を作ると内角の和が 180° となりますが，球面の上ではそうなっていない．



これを納得するのは簡単な演習問題です．たとえば赤道の上に 2 点取ってみて，北極に点を取ると，北極からの線と赤道のなす角はどちらも 90° ですね．北極のところには別の角があるわけですが，赤道の 90° を 2 つを足した時点で既に 180° を超えてしまっているので，内角の和は 180° より大きい．だから球面には球面の幾何学があるわけですね．たとえば平面上で三角形の 3 辺を a, b, c としたとき，c^2 と a, b を関係づけるのが余弦定理で，そういうのは高校の授業でよくやったものです．でも球面の上で三角形を書いて考えると，余弦定理が少し変わったりします．そういう風に球面の幾何学と平らな幾何学とは話が結構変わってくる．

■2 次元トーラス　平らな 2 次元の図形だと，たとえば 2 次元トーラスというものがあります[*5]．2 次元トーラスというのはドーナツの表面みたいなものですね．ドーナツというと中が入っているんですが，そういうのはソリッドトーラスと呼ばれていて，後で使います．

平らな幾何，トーラスの表面というのはどう作るかというと，折り紙で作れる．折り紙を用意しまして，たとえば 4 辺のうち上と下を貼り付けましょう．上と下をぐーっと貼り合わせると円筒ができますね．それでさらに，左右の線を貼り合わせるとドーナツができる．



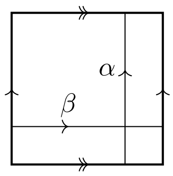
[*4] 測地線と言われるものです．球面の場合は，大円の一部になっています．

[*5] 曲面の曲がり具合を図る量には Gauss 曲率と平均曲率というものがあります．ドーナツはどう見ても曲がっているのですが，ここでの「平ら」は「Gauss 曲率が 0」という意味です．

先ほど「トポロジーでは滑らかな変形を区別しない」と言いましたので，すごく滑らかなゴムでできてると考えてください．普通の紙でやると円筒にしてから曲げようとするときぐちゃっとなっちゃうわけですが，ものすごく弾力性のあるゴム，そういう伸び縮みできる素材でぐーっと持ってきます．それは想像してもらうしかない．するとこんな風に貼り合わせることができる．これがドーナツの表面ということになります．ドーナツというのは逆に遡ると単に折り紙だったので，ドーナツの上で三角形を書くとその内角の和は 180° です．それは平らな幾何学というものになります．

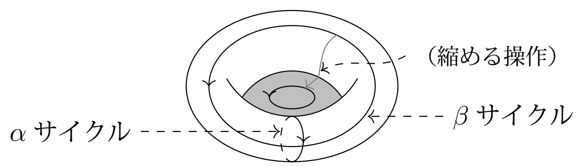
■トーラス上のサイクル　後から使うので，もう少しこのトーラスについて言っておきます．トーラスには中々面白い細工をしてやることができる．どういう細工かといいますと，同一視の仕方を変えられます．

まず先ほどのトーラスの図で，丸め上げる前に道を予め書いておく．こういう風にドーナツに α と描いたサイクルと β と描いたサイクルがあります．



サイクルって言ったのは何かというと，閉じた経路です[*6]．トーラスの上に住んでいる人がいて，トーラスの上をお散歩するわけですね．トーラスの世界というのはずーっと真っ直ぐ歩いて行くといつの間にか元に戻ってきちゃいます．それを α, β という 2 つの道で表した．ちょっとひねくれた方向に行くと戻ってこないという話はあるんですが[*7]，この線 α, β に沿って歩いて行くと元に戻ってくる．

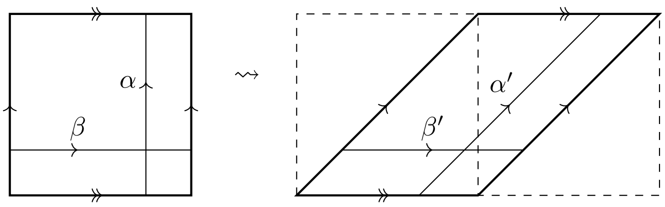
α と β というのはちょっと違うところがあって，ドーナツの上にリングが乗っていたとしたら，外の人から見ると β をどんどん狭めていくことができる．いまドーナツの穴が埋められてるとしましょう．ドーナツの上に輪っかが乗っていたとしたら，表面の上でどんどん小さくしていくと，やがて縮めていくことができる．β というのはある意味，ドーナツの上というより外に乗っている感じがする．だけどこの α サイクルというのは巻いちゃってて，縮めることができない．ドーナツに引っかかっちゃうんです．だからこの 2 つの道というのは，展開図で見るとほとんど対称で区別がないんですが，組み立てて見るとかなり違っている．もう一回言うと，α, β が輪ゴムだと思って，張力ですぼめていく．α サイクルはドーナツの中に引っかかっちゃうので縮まないんですが，β は縮めていくことができる．色々違いがある．



実はその違いを上手く活用することができて，向かい合う辺を同一視するとき，同一視する仕方を変えることができます．元々は上と下，右と左が同一視されていたんですが，たとえばこれをちょっとずらして，ひしゃげた風にする．最近の描画ソフトだと，ひしゃげるツールが入っているものが多いです．で，ひしゃげてから先ほどと同じように対辺を同一視する．

[*6] 上の展開図では閉じていませんが，トーラスを組み立てると，α も β も始点と終点が一致します．

[*7] 正方形 $[0,1] \times [0,1]$ の向かい合う辺を貼り合わせてできるトーラス上で，点 $(0,0)$ を始点としてベクトル $\boldsymbol{v}$ の方角に進む軌道を考えます．このとき $\boldsymbol{v}$ の成分の比が有理数比であれば軌道は閉じますが，そうでないと軌道は閉じず，正方形 $[0,1] \times [0,1]$ の稠密な真部分集合になることが知られています．



ひしゃげて何が起こるかというと，終わった後で α サイクルは斜めになり，β サイクルは元のままになる．図の方で path を元と区別するため α', β' と書きます．先ほど紙の上下を貼り合わせてドーナツができるという話をしたので，ひしゃげてから上と下を貼り合わせてもドーナツができる．ちょっと想像し辛いですけどドーナツになることが分かります．何も変わらないように見える．でも形は変わらないんですが，形の上に書いた path の情報が代わっちゃうんですね．前と後の関係を見ますと，β と β' は同じです．でも α' というのは $45°$ の方向に入っているから，まず α で移動してから β で移動するのと同じです．つまり $\alpha' = \alpha + \beta$ という風に変換が起こっています．これは行列をやられた方だと，2×2 行列の作用で表すことができます:

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

こんな行列がかかっている．物としては同じなんですが，乗っている線を変えています．乗っている線はペアにしたときに列ベクトルに作用する 2×2 行列で変化する．

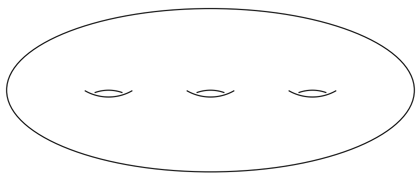
この行列はめざましい性質がありまして，この行列式は 1 です．一般に，さらにもうちょっとひしゃげさせてもいいんですね．すると，もっと一般に，整数成分の行列式が 1 の行列で

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{ただし } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ で，} ad - bc = 1$$

と表されます．こういう行列，つまり 2×2 行列で成分が全て 1 で行列式が 1 のもののセットを $SL(2, \mathbb{Z})$ と表します．SL は special linear の略です．今の場合はその特殊な元が出ました．振り返ると，2×2 行列での変換が起こる風になっています．できあがる形は同じでも，面白い作用ができることが分かります．このことをちょっとだけ後から使います．

■種数 2 以上の曲面　2 次元の球面では三角形の内角の和が $180°$ より大きい．一方で平らな幾何というのがありまして，これは内角の和がちょうど $180°$．内角の和が違うので，これらはどうも違う幾何だろうと．

実はこれで話が終わりじゃなくて，もう 1 種類幾何があります．双曲幾何と呼ばれるものです．双曲幾何そのものは今日あまり説明しないんですけども，今日の説明のために，2 次元の曲面に穴が空いた物を考えます．これは中は詰まって無く，表面だけを考えています．



一般には穴が g 個のものを考えることができまして，数学では穴の数 g を種数 genus と呼びます．先ほどの形を見ますと，球面は穴がないので種数は $g = 0$．平らなトーラスは穴が 1 個空いていたので，種数は $g = 1$ になっています．上の絵は穴が 3 個空いているので $g = 3$.

2 次元の曲面は穴の数だけでちゃんと分類できることが分かっています．必ずしも明らかではないですが，直感的には穴が 1 個のものと 3 個のものは違いますよね．2 次元の多様体 M_1 と M_2 が同じである，連続変形で移り合うための必要十分条件は，穴の数をそれぞれ $g(M_1)$，$g(M_2)$ と書くとき，$g(M_1) = g(M_2)$ になります．必要というのは「同じ物を見たとき穴の数が同じ」ということですね．十分というのは，「穴の数が同じならば必ず滑らかに移り合う」ということです．論理学でやるように，正しい主張の対偶を取ると正しい主張が出てくる．今の場合に対偶を取ると「穴の数が違うと連続変形では移り合わない」ということが従う．これはそんなに驚きではないですね．直感的には穴の数だけ数えれば大丈夫だというのが分かるわけです．1 次元の図形は，輪ゴムを何個か並べるような図で，繋がった物を大雑把に見ると輪ゴムしかなかった．今では穴の数みたいな情報があるので，もうちょっとバラエティがある．

今はトポロジーしか考えてないので，大きさが何か，形が何かというのは全然考慮していない．ただし別の幾何学，たとえば形がどうなっているか，すぼんだり大きくなったりとかを込めて何が起こるかを考えると，実はかなり豊かな世界があります．また超弦理論とかいう最近の数理物理の理論というのもあります．「全ての背後にこういう 2 次元の形がある」というとちょっと言い過ぎですけど，大体そういうような感じのことを主張しています．2 次元の形というのは素朴に見えるんですが既に面白くて，まだまだ尽きせぬものが含まれているのは確かです．

ただ．今の問題設定としては，2 次元の形を分類したい．少なくとも，今日の話に相当するトポロジーという目で見ると「穴の数だけ見れば十分である」という結論になるので，これはこれで基本的には問題は解けた．滑らかに移り合うものを同じと思うことにすると，穴だけ数えれば良いよね，というのが大体の結論になって，それで終わりになります．これが 2 次元のお話です．

■双曲幾何　せっかく内角の和の話をしたのでついでに言うと，そんなにすぐには分からないかも知れませんが，穴の数が 2 以上のときは内角の和が 180° より小さくなるということが知られています．滑らかな物が同じとしているので，曲面だけ見ていると長さや距離の情報が入っていないんですが，それを入れて真っ直ぐな線を入れて三角形を描くと，実は内角の和は 180° より小さくなる．

2 次元の幾何というのは穴の数で指定されるんですけど，穴の数によって色々違います．まず穴の数が $g = 0$ のとき，球というのは出っ張っている感じがする．穴の数が $g = 1$ のときは平らな幾何．$g \geqq 2$ の曲面は凹んだ幾何になっていまして，それが内角の和に現れている，という違いが見えることになっています．

2 次元の幾何というのは双曲幾何というものになっています．今は滑らかな構造しか考えていませんでしたが，それにさらに双曲構造というものがありまして，そこが面白い．余弦定理とかもこういうものの上で考えられるんですが，それはまた平らなときの幾何学とは違うものが広がっていて，色々面白い事がある．僕自身は双曲幾何で色々やったりしました[*8]．

> **■質問**　向き付けがない場合は，これまでの話はどうなるんでしょうか？
> ——たとえば Klein bottle とかご存知の方とかいるかもしれない．それは非常に鋭い質問で，たとえば 2 次元多様体といったとき「向き付けられた」という条件をこっそり課していました．実は色々正しくないことを言っています．

[*8] たとえば Kentaro Nagao, Yuji Terashima and Masahito Yamazaki, “Hyperbolic 3-manifolds and Cluster Algebras”, *Nagoya Math. J.* **235** (2019), pp. 1–25 / arXiv:1112.3106 [math.GT] や，山﨑雅人『SGC ライブラリ 119 場の構造と幾何』（サイエンス社，2019）があります．

2.3　3 次元の形の例: 球面とトーラス

2 次元の話ばかりやっていると，直感的にはパパッと見えるので，そんなに驚きはないはずです．今日の話はここからさらにもう 1 個だけ上，3 次元の場合に行こうと思います．3 次元くらいになってくると，そんなに簡単ではない．

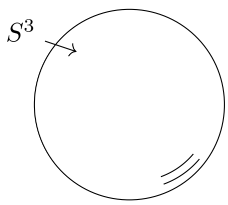
■3 次元球面　2 次元の場合に球面と平らなドーナツがあったわけですが，それの 3 次元版を考えることができる．まず 3 次元球面 S^3 というものがある．これは実は簡単なんですが，そのことは，我々にとってそんな明らかでありません．

2 次元球面がなんで 2 次元と分かったかというと，僕ら 3 次元に住んでいるからです．僕らは地球の上に住んでいると，地球を眺めるというのは難しいんです．だけど僕らはロケットを打ち上げて宇宙空間に行くと，地球がまあるくなるのが見える．地球の上に這いつくばっている 2 次元的なものから脱出して，3 次元的な立場を手に入れると，あっ丸いなと見える．2 次元のものがあって，それがさらに高い次元のもの，この場合は 3 次元のものに入っている．数学ではよく埋め込みとか言います．3 次元から見ると 2 次元がよく分かる，そういう風になっている．

それに比べますと，3 次元球面はそれ自身が既に 3 次元です．僕らがもし 4 次元の空間に行くと，3 次元球面が丸いということが見るからによく分かる．しかし僕らは空間が 3 次元なので（時間はもう 1 次元ありますが），S^3 とかそういう 3 次元の形はそんな簡単に見えるわけではない．今から紹介するようにある種のトレーニングやある種の方法を使うと，何らかの意味で見えるんですが，少なくとも素朴に「見える」というのとは違いますね．3 次元なんですけどそういう意味では結構微妙なところです．

でも見えなくなるけどそんなに離れているわけではない．たとえば 4 次元の球とか 5 次元の球とかどんどん高次元になっていくと，人間の目で見るというのはよく分からなくなります．でも数学者はですね，数式とかがあったりするので，たとえば座標の数を増やすとかできて，そこまで苦労するわけではないんです．ただ高次元になると素朴に「外から見える」というのがどんどん複雑になっていくのは注目に値するかと思います．

3 次元球面になると図が描けなくなってくるので，次の絵をなんとなく S^3 と描かせてください．

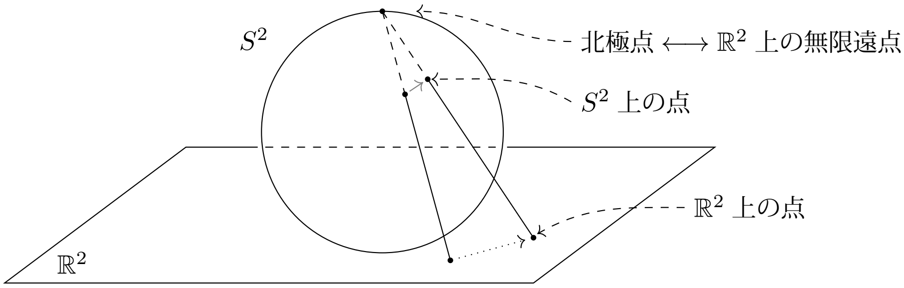


「さっきの 2 次元球面と同じ絵じゃないか！」というツッコミが入ると，「そうなんですすいません」としか言えません．でも図で気分を伝えるにはこれしかないので，描いてみました．

代数的な考え方で数式を使うともうちょっと理解できる．そのために 2 次元球の場合に戻って式を考えておきます．2 次元の球はどういう方程式かというと，たとえば $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 半径^2$．これは，3 次元の中に埋め込まれた 2 次元球面の式の 1 つの形です．だから 3 個座標があります．球面自体は 2 次元なんですが，それが 3 次元の中に入っていると思うと，球は真ん中に点があって，そこから同じ距離の点を集めてきたわけですね．そして距離は自乗の和の平方根で与えられるので，それをもって $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ が球面の方程式であると言えるわけです．僕らがいま興味が持っているトポロジーだけでなく，座標という余計な構造を入れちゃってるんですが，何か議論をしたいときにはそういうものを入れても別に問題はない．

この式を書くと何故いいかというと，3 次元球面というのはそんなに変わらず，$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=$ 半径^2 という数式で表されるからです．一般に n 次元球面だと $n+1$ 個，ちょうど 1 個だけ多く変数を用意しておいてそこで方程式を 1 個書く．この場合は 4 個変数があって 1 個条件があるので，3 個方向があることになる．その 3 方向というのが，3 次元球面の上の 3 個の方向を表す風になっている．これが 3 次元球面です．とりあえず式で，3 次元球面というのが大体どんなものかが分かる．この式を後でちょっと使います．

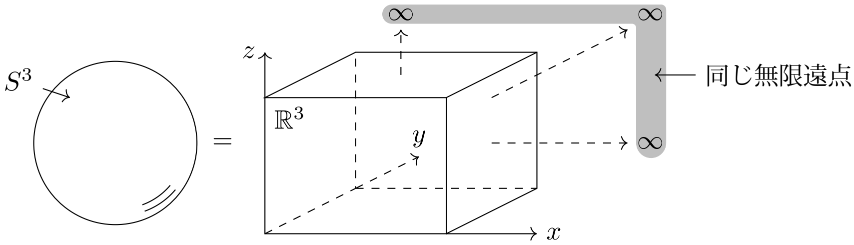
もう 1 つの見方として，3 次元球面はざっくり言うと flat な $\mathbb{R}^3$ に無限遠点を足したようなものになっています．これは S^2 の場合に説明しておくと気分が何となく分かります．S^2 の場合どういう風にするかというと，まず S^2 の南極が平面 $\mathbb{R}^2$ にくっつくようにする．北極に灯台というかサーチライトのようなものを置く．そうすると S^2 の点と $\mathbb{R}^2$ の点の間に上手く対応をつけてやることができます．



S^2 のある点を取ってきたら，北極から線をぐーっと延ばして，$\mathbb{R}^2$ 上の点にぶつける．逆に $\mathbb{R}^2$ の点があると，そこからぐーっと点を伸ばしてって S^2 の点が得られる．これで $\mathbb{R}^2$ 上の点と S^2 上の点が，上手く対応付くことになります．しかも対応が付いているだけじゃなくて，距離の概念までは保たれていないものの，ある程度「近い」という概念が保たれます．S^2 上で点がどんどん近づいていったとすると，$\mathbb{R}^2$ 上でも点が近づいていく関係がある．そうすると S^2 というのは大体 $\mathbb{R}^2$ と同じなんです．

ただ 1 個だけ違いがあって，それはどこかというと，北極にあたるものが $\mathbb{R}^2$ に入ってないんですね．北極からちょっとだけでも離れていれば，そこからぐーっと線を伸ばしていけば $\mathbb{R}^2$ 上のどこかに点があるんですが，北極自体を伸ばそうとすると，その極限なので無限に飛んで行っちゃう．その無限に飛んで行っちゃう行き先というのが，$\mathbb{R}^2$ 上の無限遠点というものになっている．北極点が 1 点なので，無限遠点というのは実は 1 点なんです．無限に行く方向は沢山あるような気がするんですが，どこに行っても同じ所にたどり着く．言い方を変えると，S^2 というのは $\mathbb{R}^2$ というのに無限遠点を足しなさいと．flat なものがあって無限にずーっと行ってもいいんだけど，どの方向に行っても同じと思いなさいと．それが S^2 です．

これと大体同じような感じで，S^3 の場合は $\mathbb{R}^3$ という箱を用意してそれをどんどん大きくしていく．$\mathbb{R}^3$ はなにかというと，$\mathbb{R}$ が実数で，それが 3 個の方向だけ有る．図に描いた素朴な直方体のようなものです．サイズをドンドン大きくしていく．ただし無限に近づくとき，無限に行く方向は上に行ったり右に行ったり下に行ったりとか色々あるんですが，それらを同一視してできたのが無限遠点．これを加えた物が 3 次元の球面．

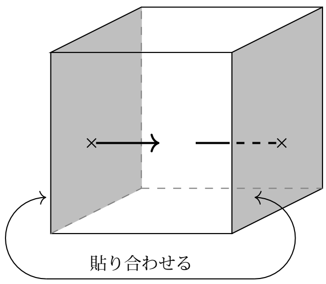


3 次元球自体はそんなに難しくなくて，基本的にはこの flat な $\mathbb{R}^3$ に見える．変換すると，箱があって，無限遠点を加えた物，というものと思ってよい．だから我々が知ってるのとそんなに変わりません．こういうことを後でちょっと使います．

これ意味不明ですかね……？その都度分からなくても，話の大勢にはそこまで影響しないです．

■3 次元トーラス　2 次元のときに対応して 3 次元のときのトーラス，3 次元のドーナツというものを考えます．2 次元のときから考えると高次元にいく感覚が掴めてくるかもしれない．

2 次元だと紙を用意して向かい合う辺を同一視しました．2 次元のときの類似で，3 次元のトーラスというのは，直方体を用意して向かい側を同一視する．3 次元で行きたければ 3 方向あるので，3 方向の立方体を用意する．だから図自体はさっきの S^3 と似ているんですが，さっきと違うのは，向かい合う面を同一視する．



たとえばこの中を散歩している人がいて，左の面にいくと，いつの間にか右の面から出てくる．そういうある意味退屈な世界です．動物園の檻みたいな壁があるわけじゃないんです．動物園だと檻で戻ってきてうろうろしなきゃいけないんですが，檻があるわけじゃないのでずーっと歩き続けられる．気分良く散歩を続けることができるんですが，実は同じ所をぐるぐる回っている．これが 3 次元トーラスです．

いま 1 次元の方向しか話してないですけど，他の方向もある．上側の面と下側の面が同一視される，などなど，向かい合う面のペア 3 つがそれぞれ同一視される．これが 3 次元のトーラスというもので，torus の T を取って T^3 と書かれます．そういう幾何というものが，先ほどの平らな幾何の 3 次元バージョンになっている．

■その他の幾何構造　これ見て分かると思うんですけど，3 次元球面とトーラスはさっきの 2 次元の場合とそんなに変わらない．内角の和とか考えると，これらの幾何は違うものになっている．

かなり難しい話なんですが，実は 3 次元には S^3 と T^3 の 2 個だけじゃなくて，計 8 個の異なる幾何がある．こういうことを言うと逆に混乱させちゃうかもしれませんが，ここで「異なる」というのはトポロジーで区別するのと違っています．2 次元の場合穴の数があるから，トポロジーとしては無限個あった．ところが内角の和みたいな基準で見ると 3 通りしかない．内角は $180°$ と同じか $180°$ より大きいか $180°$ より小さいか 3 通りあって，それが 3 種類の違う幾何となっているんです．3 次元の場合，こういう球面っぽいやつとトーラスっぽいやつがあって，あと穴がたくさんあるやつドーナツ相当するやつで 3 通りあるんですが，その他にこれらを組み合わせたようなものがあって，実は 8 個ある．

これは Thurston という人が予想したもので，幾何化予想といいます．フィールズ賞をもらった Perelman，もらったけど辞退したのかな，Perelman という人の結果です．彼はそれを解いたんですけど，色々あって隠遁生活に入ったすごい数学者です．だからどういう幾何があるかを証明するのは，3 次元の場合でさえ，既にものすごい大問題です．

2.4 3 次元の形に関する考察

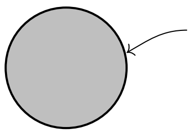
今日は幾何化予想の話をするんじゃなくて，もう少し具体的に，どういう形があるのかをさらに話します．球面とトーラスの 2 個だけ形を言ったんですが，これだけだとちょっと退屈ですね．座標を 1 個増やしただけであまり変わらない．まだ 2 次元と形が近い感じがする．そうではなくて，もっと違うやつをじゃんじゃん作りたい．そのときにどうすればいいのか．

実はテクニックがありまして，それを使うとものすごく一般の 3 次元の形を作ることができます．直に見えるわけではないけどもある意味色々操作して議論することができる．そういうことをすると 3 次元の形が分かってきますので，その 3 次元の形の理解を元に，次の 2 コマ目の講義で，位相的場の理論というのをやる．

というわけで今から，S^3 だと T^3 だけじゃなくて一般の 3 次元の形に行くにはどうしたらいいかというのを考えたいと思います．そのために新しいことをするというよりは，S^3 の場合をもう一回考え直す．数学ではよくあるんですが，簡単な例，この場合は S^3 に色々なアイデアが含まれています．S^3 の場合をよく考えると，それを一般化することで，実は任意の 3 次元の形ができるという風になっている．しかもこの場合は，その一般化の仕方が色々何通りもあって，その辺が既に豊かな構造になっているわけなんです．まずそれを知るために S^3 をもう一回再訪します．

■S^3 の分解　S^3 は $\mathbb{R}^3$ に無限遠点を足した，これでいいじゃんと思うかも知れないんですが，3 次元球面には他にも面白い性質があります．1 つはですね，3 次元球面というのはドーナツ，中の詰まったドーナツを 2 つ合わせてきたものだという主張 $S^3 = (D^2 \times S^1) \bigcup_{S^1 \times S^1} (D^2 \times S^1)$ があります．ソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ を 2 つ，$S^1 \times S^1 = T^2$ で貼り合わせる．記号の意味を今から説明します．

まず $D^2 \times S^1$ は何かを説明します．かけるというのは大体，別の方向に伸ばすことですね[*9]．D^2 は何かというと，D は disk で，2 次元円盤を表します．だからこういう，カップとかのコースターですね．これには境界というものがあります．境界というのは端っこにあるやつですね．S^1 という輪っかが境界になる．

2 次元円盤 $D^2 =$ 

右の S^1 は「このディスクを別の輪っかの方向に動かす」という意味です．たとえばコースターを持ってきて，ぐるぐるっと回す．よく大学入試の立体問題にありそうですよね．これを $D^2 \times S^1$ と表します．

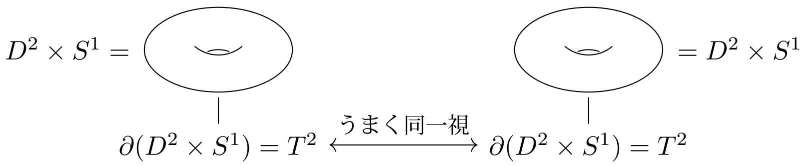
円盤を持ってきて軸の周りに回したものが $D^2 \times S^1$ というものです．やると分かるんですが，中の詰まったソリッドトーラスができます．境界はトーラスですね．詰まりの部分を除くと表面はトーラスになります．境界を取りますと 2 次元トーラス T^2 になる．境界を取るのを ∂ という記号で表しますと，T^2 はよく考えると $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$ になる[*10]．回す前の D^2 の境界が S^1 だったので，これを回して $S^1 \times S^1$ が境界になる．一方で S^1 というのはある方向に行ったら戻ってくる．2 次元トーラスは 2 方向あり，2 方向どっちでも戻ってくるので $S^1 \times S^1$．あるいはトーラスって折り紙みたいなものだと思っていたのですが，折り紙に 2 方向あったのを閉じてそれぞれ S^1 になる．

まず左側の $D^2 \times S^1$ でソリッドトーラスが 1 個あります．確かに 3 次元になっています．

[*9] たとえば $[0,1] \times [0,1]$ で正方形を表します．左の $[0,1]$ が横の辺，右の $[0,1]$ が立の辺です．

[*10] $\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B)$ から従います．

主張は何かというと，もう 1 個同じソリッドトーラスを持ってきて境界を上手く合わせてやると，実は 3 次元の球になるということです．こういう中の詰まったドーナツ $D^2 \times S^1$ とコピーをもう 1 個持ってくる．全然別の同じ形があって，境界にそれぞれトーラスがある．それぞれのトーラスの間を上手く同一視する．



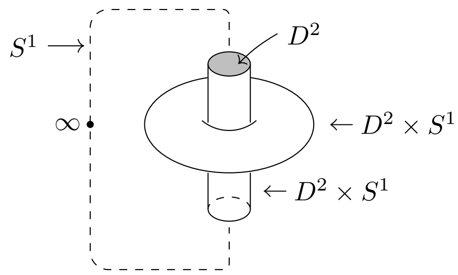
同一視するというのは「一方の点を持ってきたときに他方の点と思いなさい」ということです．たとえば 2 次元ソリッドトーラスの片方に住んでいるとするじゃないですか．これをどんどん歩いて行って，ドーナツの周りをぐるぐる回ることもできるんですが，「このドーナツの中飽きた．外に出かけたい」と表面を突き抜けてドーナツ 1 から出国する．そうするとドーナツ 1 の表面を通るとき，表面はドーナツ 2 の表面上の点と同一視されているので，ドーナツ 1 から出ようとするともう 1 つのドーナツ（ドーナツ 2）の中に入っていくことになります．そこでさらに歩いて行くと，いつの間にかドーナツ 1 に戻ってくる．いつまで経ってもソリッドトーラスの中にいるわけなんですけど，どっちのドーナツにいるかは 2 つのチョイスがある．そういう状況です．それを合わせて見ると何か 3 次元の形ができてるんですが，その形が実は 3 次元球面というやつになっている．

これの説明はせっかくなので 2 通り用意しました．ネットを調べてもらうと色々な人が色々なことを書いていて．結構有名なやつです．僕自身はそういう可視化するのがあんまり得意じゃないのであれなんですが，考えてみると面白いですね．

■説明 1: 幾何的な考察　この説明は幾何っぽい人，幾何っぽい説明が好きな人にはいいと思います．

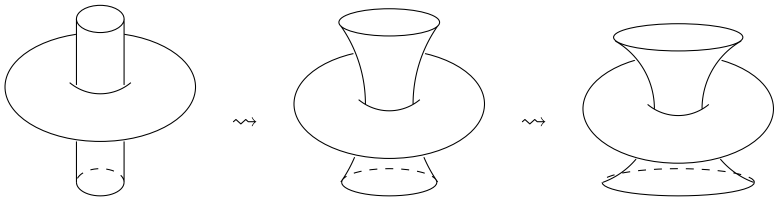
S^3 というのは，元々ある flat な $\mathbb{R}^3$ に無限遠点を足した物でした．ある意味その辺にある空間そのものですね．そこにソリッドトーラス，穴の詰まったトーラスをボコッと 1 個置きます．空間全体に無限遠を足すと S^3 だったので，今の分解が正しければ空間の残りはソリッドトーラスになっているはずです．もう一個ソリッドトーラスを描いて全体を埋め尽くせばいいですね．

ソリッドトーラスを取った残りの空間もソリッドトーラス．それは本当にそうなんだろうかというと，こういう図を描く．これをずーっと眺めると，何となくそう見える．



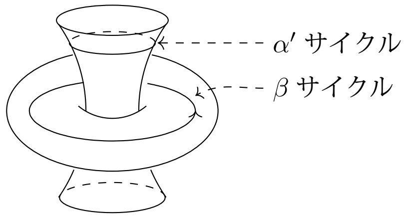
いきなりやるのは難しいので，まずトーラスの内側に，円筒を入れる．しかも円筒の中を詰める．すると D^2 が無限遠に伸びていくんですけど，無限遠点を同一視するのが無限遠点の考え方でした．上の遠くにいくと実は同じ無限遠点で下から出てくる．無限に行くのだけど，無限は 1 個しかないのでこっちから出てくる．そうすると下から上の方向に S^1 があるんですね．S^1 があります．だからこういう風に無限遠へと伸びる円柱を作りますと，それ自体はソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ になりました．

これはかなりいい線を行っていて，最初に置いたソリッドトーラスの残りのかなりの部分を埋め尽くしているんですが，まだ全部ではない．たとえば左上の点は埋め尽くされていない．埋め尽くすにはどうしたらいいかというと，「もうちょっと足りなかったな」というわけで，ソリッドトーラスをもう少し広げます．



先ほどは無限に行くにつれて同じ太さだったのですが，それをどんどん大きくするように増やしました．するともう少し大きい領域をカバーしています．さらにもっと大きくしていってカバーし，想像力を膨らませて続けていきますと，やがては全ての点を敷き詰めるようになる．この元はソリッドトーラスでした．連続変形で移り合うので，伸ばしていってもソリッドトーラスです．後から入ったものもソリッドトーラスで元からあったものもソリッドトーラスなので，S^3 は実はソリッドトーラスが 2 つ合わさったものになる．これが 1 つの説明です．ちょっと騙されたような感じがするかもしれない．

先ほどトーラスがあったとき，α サイクルと β サイクルというのがありました．β サイクルというのは外から見ると潰れるんですが α サイクルは外から見ても潰れない．ところがソリッドトーラスの中から見ると α というのは潰れるわけです．だからどっちから見るかによって変わってます．この 2 つのソリッドトーラスでは，α サイクルの役割と β サイクルの役割が入れ違っている．たとえば最初に置いたトーラスの上に path を取ったとします．



β はどういうサイクルですかというと，元からあったソリッドトーラスの境界に描かれていると思えるわけですね．だから元の方から見ると，これは β サイクルです．これは外から見ると潰れるようになっている．外に出ちゃっているので，輪ゴムが潰れる感じになる．ところがもう 1 つの残り，取った残りの方のソリッドトーラスから見たらどうなっているかといいますと，α サイクルになる．実は貼り合わせるソリッドトーラスは同じと言いつつも，α サイクルと β サイクルを入れ替えて同一視する，そういう同一視の仕方になります．S^3 というのはソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ が 2 つあって，それぞれの表面に α と β，α' と β' というのがあったんですが，向きまで込めてそれらがどう関係しているかというと，α サイクルと β サイクルが入れ替わる．向きのチョイスまで込めると $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ で α サイクルと β サイクルを入れ替えてから同一視する，という風になっているわけですね．貼り合わせるんだけども，ちょっとややこしいことをして貼り合わせている．

■**説明 2: 代数的な考察**　せっかくなのでもう 1 つの説明も言います．説明 2 は「図とかでふわふわしてて信用ならん」という方のために式で説明する．

S^3 は $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=r^2$ という式で書かれているというのを先ほど説明したんですが，これを 2 つの部分に分けるんですね．たとえば $S^3=\left\{x_1^2+x_2^2\leqq\dfrac{r^2}{2}\right\}\cup\left\{x_3^2+x_4^2\leqq\dfrac{r^2}{2}\right\}$ と 2 つの領域に分ける．$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=r^2$ なので左右の 2 つの条件はどっちかが必ず満たされていて，しかも両方とも $=$ のときを除けば片方しか成り立たない．だから S^3 というのがこのように 2 つに分かれたことになります．

2 つの集合を定める条件は明らかに対称なので，左だけ見ましょう．左だけ見ると，(x_1,x_2) 方向は円盤です．x_1 と x_2 というのがあって，半径が $r/\sqrt{2}$ の円盤の中に入っている．残りの方はどうかというと，x_1 と x_2 を決めると，$x_3^2+x_4^2=r^2-(x_1^2+x_2^2)$ となっていまして，右辺はいつでも 0 以上です．だからこれは円周になる．この円周の半径は (x_1,x_2) がどの点にいるかによって変わるんですが，いずれにせよ正になっていて，いつも (x_3,x_4) 方向は円周．だから全部の方向を合わせると $D^2\times S^1$ になっている．

左が $D^2\times S^1$ になってまして，対称なのでもう一方の集合もやはり $D^2\times S^1$．どちらもソリッドトーラスになっている．2 通りに分けてそれぞれがどういう形をしているか頑張って調べると，それぞれ $D^2\times S^1$ であると分かります．こういう数式を使った説明の仕方もあります．同一視のとき α サイクルと β サイクルが入れ替わるというのも，これで考えてもらうといいかと思います．

2.5　Dehn 手術

1 次元と 2 次元で基本の形とはどういうのかを調べまして，まだ球面しかやってないんですけど，ようやく 3 次元に到達しました．3 次元には面白い形が色々あるので，残りの時間で一般の形を作るにはどうしたらいいかを話して，そのアイデアを上手く取り込む形で位相的場の理論が出てくる様子を話したいと思います．

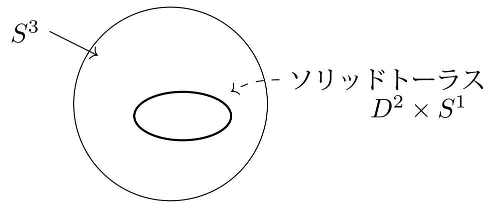
S^3 をソリッドトーラスをつなぎ合わせるという操作で作りました．この 1 個の例を敷衍，一般化することで一気に一般の 3 次元多様体に行っちゃおうというのが戦略です．

■**S^3 の分解に関する考察**　一般の多様体に行く前に，ちょっとだけ一般化した場合をやります．どういう風にやるかというと，一つの方法は，S^3 と同じ $(D^2\times S^1)\bigcup_{T^2}(D^2\times S^1)$ で，境界のトーラスの貼り合わせ方を変えるる．それぞれの境界は T^2 になっていて貼り合わさっているわけなんですけど，先ほどは α サイクルと β サイクルを上手く入れ替えるようにして貼り合わせるて S^3 になりました．ところが混ぜ方を $\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ と変えることもできます．先ほどは $\begin{pmatrix}0&-1\\ 1&0\end{pmatrix}$ という行列で定まっていたんですけど，ここを 2×2 行列で，先ほどのように係数が全て整数で $ad-bc=1$ のもので貼り合わせる．具体的にどういう物かというのはあまり描かないんですけど，もう少し一般の行列を考えて貼り合わせることができます．building block は同じなんですね．

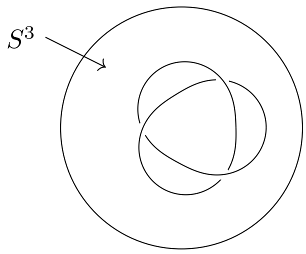
ソリッドトーラスのコピーを 2 個持ってきて，貼り合わせるとき同一視したわけなんですけど，どう同一視するかの仕方だけを変える．先ほどの 1 コマ目で α と β を 2×2 行列で入れ替える操作をしたんですね．同一視するときに入れ替える操作をしてから先ほどと同じ方法で貼り合わせる．そういうことをするわけです．そうすると違う形が出てきて，それにはレンズ空間という名前がついている．これは S^3 じゃない，別の形になっている．ただ元の S^3 と実はそんなには変わらない．たとえば左の $D^2\times S^1$ に既に S^1 というのがあって，S^1 は残るんですね．だから S^1 が中に入った 3 次元多様体になっている．これが本当に元と違うかというのはそんなに明らかなじゃないんですけども，示すことができます．

■Dehn 手術　S^3 を分解したわけですね．それを元と同じように貼り合わせたら元に戻っちゃうんだけど，分解しておいて貼り合わせるとき境界の同一視の仕方を変えて貼り合わせるというテクニックを使うんですね．そうすると違う形が出てくるという風になっているわけです．

これはものすごく一般にやることができて，Dehn の手術 surgery と呼ばれています，お医者さんの surgery と何となく似ているので surgery．どういうことか．まず S^3 から出発します．S^3 から出発して，この中に結び目を増やしてやるんですね．この絵，例によって 3 次元と思っているわけですけど，S^3 の場合だと，中にソリッドトーラスを取って来たわけですね[*11]．だから S^3 を分解したければ，まずこの中からソリッドトーラスを取って来なさい．するとソリッドトーラスの中と外に分かれます．



ここで貼り合わせるときに貼り合わせの仕方を変えると違う幾何ができる．これは手術の例になっていて，S^3 の手術からレンズ空間ができることになります．ソリッドトーラスはもっと複雑な形を取ることができまして，S^3 があったときに，たとえばこんな風にやってきて，伸ばします．



S^3 上の結び目は，物としてはソリッドトーラスと同じなんですね．複雑な形を取ってきたように見えるんですけど，切り口を取ると必ず 2 次元の円盤 D^2 が得られるんですね．で糸の方向にはぐるぐると回っているから S^1 なんです．S^3 への入り方が元のやつと結構違うんですけど，同じではある．これは結びついちゃってるので，S^3 の中で引っ張ったりしても元の丸には戻らない．こういう風に S^1 が S^3 の中に埋め込まれた物を結び目といいます．正確には結び目をちょっと膨らませたものなんですけど，結び目をちょっと膨らませたやつがあって，そこを取り出してくる．

もう一度さっきの場合を言います．さっきは S^3 に手術しますと．レンズ空間が得られるのでした．手術するときまずどうするかというと，ソリッドトーラスをどこかからぐりぐりっとくりぬく．くりぬくチョイスは色々あるんですが，これは一番シンプルなくりぬき方です．一番シンプルにぐーっとトーラスをくりぬいて戻ってくる．そうすると，ソリッドトーラス 1 個が取れるわけですね．そうしたら取り除いてからもう一度貼り直す．貼り直すときにこういう変換で貼り直すと違う幾何ができるという話をしました．それと全く同じ手続きをもっと複雑な結び目でやることができて，こういう風に結び目に沿って穴をくりぬいてやります．穴をくりぬいてやるとソリッドトーラスが取り除けるんですけど，そのソリッドトーラスをもう一回貼り直す．そのときに貼り合わせ方を変えるということをすると，また別の多様体，別の形ができるということになります．

[*11] 「結ばれていない」と思うかもしれませんが，これは自明な結び目と呼ばれています．

もう一回どういう手続きか書きます．まず S^3 から結び目 K を選ぶ．結び目を取ってきます．結び目をたくさん集めたものをリンクというので，リンクと言った方がいいかもしれない．それを少し膨らませる．で，それが先ほど S^3 の中にある．簡単なものでも，もっと複雑な結び目を取って来てもいい．それがステップ 1 で，次に K に沿って S^3 からソリッドトーラスを抜き取る．そうすると新しい形ができまして，M と書くと，M というのは境界がトーラス T^2，境界がある形になります．そしたらその後に，今度はこの M にソリッドトーラスを埋め直す．ただしそのときに，くりぬいて同じ物をもう一回同じように埋め直したらもちろん元に戻ってしまうんですけど，α, β サイクルを取り替えることができる．そうしてできたのが M' という形です．こういう手続きによって新しい形が出てくることになります．本当に新しいかは必ずしも明らかじゃないんですけど，S^3 から出発して新しい形が出てきたことになります．

■Lickorish–Wallace の定理　Lickorish–Wallace の定理というかなり大きな定理があります．どんな 3 次元の形であってもこの方法で適当に作れてしまう．ただ「この方法」というとき，さっきは結び目といったときこれ 1 個だけだったんですけど，1 個だけじゃなくてこういうのが沢山，何回も繰り返す必要があります．

定理（Lickorish–Wallace）

任意の閉じた向き付け可能かつ連結な多様体は，S^3 のあるリンクに沿っての Dehn 手術で実現できる．

これは中々面白い定理ですね．一般の 3 次元の形というのは中々想像し辛いんですけど，S^3 の中から結び目を取ってくるっていうのはそんなに難しくない．S^3 って $\mathbb{R}^3$ みたいなものなんで，そこに結び目を取ってくることだったら想像できますね．あとは 2×2 行列を指定すると，貼り合わせた後の形が原理的に定まっていることになるわけです．一般には違う結び目から出発して同じになる場合もあるんですけど，ともかくそういうことをやると，得られる形は，実はありとあらゆる 3 次元の形を尽くすことができる．そういうのが主張になります．直接 3 次元の形は見えないんですけど，操作の後に出てくるという意味では，3 次元の形を見ることを可能にしてくれている定理なんですね．

一般の 3 次元の形について何か証明したいということがあったら，Lickorish–Wallace の定理を使うというのは 1 つの方法になっています．3 次元多様体にはかなり複雑なものがあるんですけど，それを Lickorish–Wallace の定理で分解する．Dehn surgery をするというのは，こういう風にソリッドトーラスを取って貼り合わせることなので，ある意味分解するということですね．分解して貼り合わせの仕方を変える．で，そういう分解すると実は話は簡単になって，そういう一般の形でも議論出来るというのが，そういう複雑な形でも分解していったらどんどん簡単になるよね，という主張です．ある意味非常に広い意味での哲学ですね．

もちろんこれは結び目というものが残っています．結び目自体には結構複雑なものがあって，種類も無限個ありますので，それ自体は複雑ではあります．ただ少なくとも目で見えるようなものにはなっている．

こういう考え方というのは実は色々あります．今は Dehn 手術という 1 つの分解の仕方なんですけど，この他にも 3 次元多様体には分割の仕方がいくつも知られています．3 次元多様体の分割とかいって調べると何通りあるのかな，僕も詳しくはしらないけど少なくとも 5 通りくらいは分解の仕方があって，それぞれにメリット・デメリットがあって，何を調べたいかによって違うものを調べる．そういう分解の一例を，今日ご紹介してみたという感じです．

3　位相的場の理論

話題が色々長くなっちゃいましたけど，ようやくここで，位相的場の理論の話をします．その話しないと「お前タイトルに書いたのにしゃべってないじゃないか」と言われちゃいますね．羊頭狗肉というやつですね．

3.1　トポロジカル不変量

閉じた多様体，閉じた形にだけ興味があるとしても，世界を境界付きのものまで広げて考えると色々な物事が簡単になります．1 つの形を考えるだけじゃなくて，形とそれを分解したものを全部ペアで考える．形 M だけでなくその切り貼りも重要という思想です．

思想

形 M だけでなく，その切り貼りも重要！

これはいま僕が勝手に作った教訓で，別にこういう教訓がどっかの教科書に書いてあるわけでもないので，もしかしたら「こんなのはけしからん」と他の数学者の方に怒られるかもしれません．でも，切り貼りするという考えは一般的で，重要ということに相違はない．

今まで抽象的だったので，できれば具体的な数を計算するとかいう話にしたいですね．そこで先ほどの 2 次元の場合にちょっと近い考えなんですけど，不変量というものを定義します．

トポロジカルな不変量 topological invariant を定義したい．これは何かというと，多様体に対して定義される数です．そして M_1 と M_2 という 2 つの形のトポロジーが，最初に定義した「滑らかで連続につながってる」という意味で同じときに，数が必ず同じにしたものです．つまり $M_1 \sim M_2 \Rightarrow Z(M_1) = Z(M_2)$．トポロジーが同じでも見かけが違うものって色々あって，たとえば「コーヒーカップとドーナツが」とか良く言いますけど，それに関して数を定義して，形は違ってもトポロジーが同じなら必ず答えが同じ，という量を定義したい．多様体があった毎に数が定まる．その数はどういう性質を持つかというと，トポロジーにしか依らない．連続変形しても数は不変．数は実数でもいいし，複素数に取っておくと便利ですね．

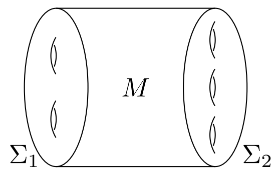
不変量というのは中々面白い．具体的に数が出てくるというのも面白いんですけど，論理学をやると対偶を取ることができる．すると $M_1 \sim M_2 \Rightarrow Z(M_1) = Z(M_2)$ のもとで $Z(M_1) \neq Z(M_2)$ と仮定すると M_1 と M_2 は同じじゃないということが分かる．同じだったとすると Z の値も同じになっちゃうので仮定に反する．というわけで，複雑な形が本当に同じかどうか確信がないときに，運が良ければ不変量を計算して「値が違うから必ずこの形は違うよね」という風に結論できることができます．これが不変量の使い方になるわけです．

ただし重要なのは，逆方向は一般的には言えないんですね．数が同じだからといってトポロジーが同じかどうかは分からない．つまり $Z(M_1) = Z(M_2) \not\Rightarrow M_1 \sim M_2$．逆に行けるとかなり強い不変量なんですけども，一般にそういう不変量を見つけるのはそんなに簡単ではない．1 時間くらい前かな，2 次元の向き付け可能多様体の話をしていたとき，穴の数という話をしたわけですね．そのときは穴の数だけ見ればトポロジーが分かった．トポロジーが同じならば穴の数も同じだし，穴の数が分かればトポロジーも同じ，両方行き来できたんですが，今の場合はそういう量を見つけるのは簡単ではない．片側にしか行けない．

トポロジカルな不変量を考えたいというのが問題意識になります．貼り合わせも重要なんだけども，一方でこういう数を定義して，形を区別したいという動機がある．この 2 つを上手く合わせると，位相的弦理論というもの……失礼，弦理論やりすぎですね（苦笑）．位相的場の理論というものが出てくることになります．

3.2　位相的場の理論の定式化

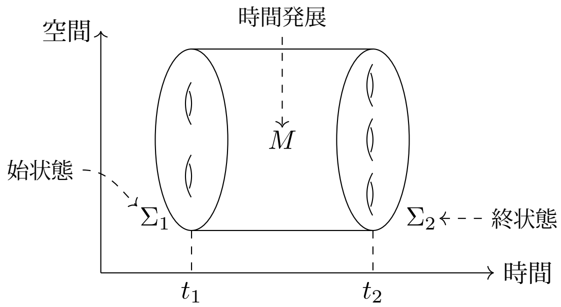
数を定義したいのは閉じた多様体に対してなんですけど，でも先ほどの貼り合わせ，Dehn 手術とか見ると，境界を持った多様体まで考えを広げておくと便利です．たとえば 3 次元の形 M の境界が 2 つある状況を考えましょう．境界を Σ_1 と Σ_2 とします．こう穴がある．穴の数が違ってもいいですね．



あまり強調していなかったんですけど，素朴には M に向きがあるとすると，境界にも向きが従うわけですね（高次元の場合には，向きが何かというのは色々考えなきゃいけないんですけど）．そう考えると，左側の境界と右側の境界とで向きが逆向きになっているので，それを表すのに $\partial M = (-\Sigma_1) \cup \Sigma_2$ とマイナスを書いたりします．M の向きが定まっていると左右で境界の向きが逆．

■時間発展　あまり正確じゃないんですけど，気分としては，横方向を時間みたいなものと思いましょう．M はいま 3 次元になっていまして，Σ_1 と Σ_2 は 2 次元．だから我々の時間とはちょっと違う．我々の時空というのは，3 次元の空間に加えて 1 次元の時間があって合計 4 次元になっているんですけど，そうじゃなくて 2 次元の人の立場に立って，我々 2 次元に住んでいるとしましょう．そこにエクストラに時間というのを持ってきて，それが横の方向．

ある時刻では Σ_1 っていう 2 次元の形があって暫く待つと別の形 Σ_2 って形が出てきて，なんか 3 次元のもので繋がってる，そういう状況が位相的場の理論の基本的な設定になるんですけど，どうやって理解するか．



これは抽象的な形ですけど，我々が何となく相手にしている時間とはそんな違うわけじゃないんですね．たとえば机の上にアイスクリームを置いていたら溶けちゃった．そういう現象がある，時間って概念があると，あるものがある状態から別の状態へ移り変わるということになっているわけですね．物理っぽい感じでそれを書くと，左に状態みたいなものがある．左に形があって形の上に人が住んでて，一方で横軸に時間 t ってのがあります．最初の時間のときに自分の世界がどうなっているかというと穴が 2 個あって，その上で色々面白いことが起こっているわけですね．それがある種の状態．最後に暫く立ってから見ると，穴の数が世の中変わっている．それが別の状態．始状態と終状態とか言っても良いかもしれない．3 次元の部分ってのは時間が経つってことですね．よく時間発展と呼んだりします．

どういう時間発展が起こるかというのは，この 2 次元の面の上でどういう人が住んでいるとか，どういう現象が起こるかに依るわけですね．色々なことに依り，一般には結構複雑になります．ただ，いまはできるだけ簡単にして考えたい．

■古典的描像 vs. 量子的描像　形に関係して話してますけど，やってること自体はすごく一般化できますね．何か状態があって，待ってると別の状態になる．ある意味それは計算機みたいなものなんですね．待ってると操作が起こって別のものになる．

話が一旦離れちゃうんですけど，よく皆さんが高校で習うほとんどの部分の力学というのはですね，状態があったときにそれは確定しています．それは所謂古典力学と呼ばれている．たとえば始状態が 2 通りあったとする．一般の系では始状態は沢山有るかもしれない．3 通りかもしれないし 10 通りかもしれないし無限通りかもしれないんですけど，そうすると複雑なので，たとえば 2 通りとしましょう．2 通りとはどういうことかというと，たとえばコインをパッと投げて，見たとき裏か表かみたいなのでもいいし，コンピュータとかもっと得意な人は 0 か 1 かみたいなのでもいい．$\uparrow$ か $\downarrow$ か，あるいは 0 か 1 か，そういう 2 通りがあったとしましょう．終状態も一番簡単な場合で 2 通りだとしましょう．始状態・終状態とも $\uparrow$ か $\downarrow$ か，あるいは 0 か 1 かになってるので，たとえば 0 だったものが 1 になるとか，0 だったものが 0 のままとか，そういう時間発展をするというのが，古典力学の考え方です．実際に計算機の中では 0 と 1 というのが並んでいてそれが別の 0 と 1 に移り変わる．それが古典的な考え方なんです．

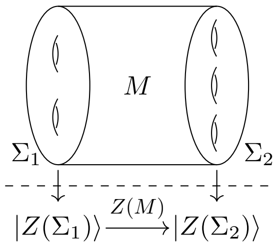
ですが，これから話す位相的場の理論というときには，「量子バージョン」というのをやります．古典というのを量子に取り替えて，量子力学というのにする．高校だと多分物理の最後の方で Bohr 原子論とかやることになってたと思うんですが，そういうところでちょっと出てきたかもしれません．

量子力学にすると状態 0 とか 1 とか言っているのは，0 とか 1 じゃなくて実は「0 と 1 の重ね合わせ」というものになる．0 と 1 に合わせて，状態をそれぞれ $|0\rangle$, $|1\rangle$ で表し，始状態を $\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$ と表す．ただし γ とか δ というのは複素数．こういう変なことを考えるわけですね．ブラケット記号 $|\ \rangle$ がいいというのは後から分かることです[*12]．古典的には 0 か 1 があったらどっちかに決まる．コインがあったら裏か表かどっちかしかない，というのが普通の世界なわけです．でもここで γ と書いたのは複素数なので，たとえば $1 + 0.3i$ とかいうのでもいいんですね（本当は規格化しなきゃいけないかもしれませんが）．とにかく複素数がかかっていて，その数かける $|0\rangle$，また別の複素数かける $|1\rangle$，そういうものが許されるというのが量子力学の考えなんですね．何故そうなってるのかというのは物理の方で色々面白い話があるんですけど，ここではそういうもんだと，ふーんと思ってください．

こうすると時間発展で何が起こるかというと，今までは 0 と 1 が変わるってだけだったんですけど，始状態は $\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$ になってて，終状態は別のコンビネーション $\gamma'|0\rangle + \delta'|1\rangle$ になる．時間発展が起こるっていうのは，複素数が 2 つあるベクトル $\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$ を別のコンビネーション $\begin{pmatrix}\gamma'\\ \delta'\end{pmatrix}$ に移す操作になっている．そして，移すというだけだとものすごい一般なんですけど，量子力学では実はこれが 2×2 行列，成分が 4 個ある行列の線形変換で与えられる．さっきは 0 と 1 って 2 種類しかなくて集合みたいだったんですけど，量子力学に行くと状態ってのはベクトルになっている．状態がベクトルになっていまして，時間発展の部分は行列．数学的には量子力学に行くってのは割と意味自然です．ベクトルが状態で，行列で書けるのが時間発展であるというのが，量子力学の設定になる．

*12 ブラケット記号を使う利点の 1 つは，複素共役転置ベクトルを $\langle\ |$ と表すことで，ペアリングなどが自然に表現できることです．ただ今回の講義では，ベクトル $\vec{v}$ の上に乗ってる矢印のようなものと考えていれば十分です．

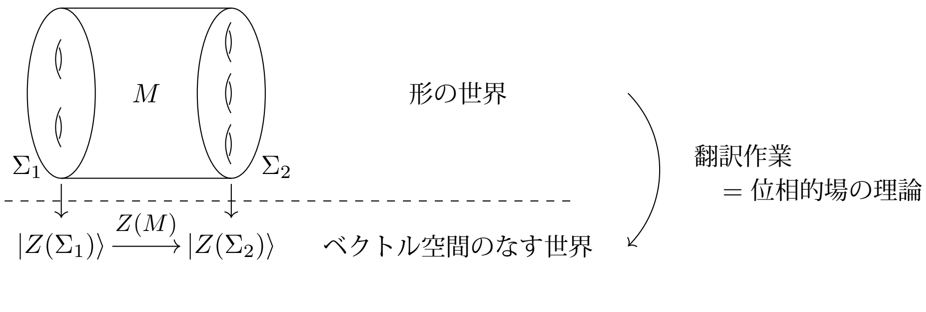
もう一度戻りますと，3 次元の形を見るときは境界があるものを考えることが重要です．こういう例がある．



一方の端っこに Σ_1，反対の端っこに Σ_2 があって，時間に沿って何かが発展してるように見えます．左右に状態があるんですけど，量子力学の考え方を使うと，状態ってのはベクトルである．というわけなので，始状態って書いてある Σ_1 に対応するベクトルを $|Z(\Sigma_1)\rangle$ って書きます．ブラケット記号 $|\ \rangle$ はまだ意味を説明していないですけど，これはベクトル．Z というのは何か対応物があるって意味です．同様にして反対にも状態 $|Z(\Sigma_2)\rangle$ があります，M の部分は時間発展と呼んでいたわけですけども，$Z(M)$ って何かというとベクトル $|Z(\Sigma_1)\rangle$ をベクトル $|Z(\Sigma_2)\rangle$ に送る写像になっています．$Z(M)$ はベクトル $|Z(\Sigma_1)\rangle$ をベクトル $|Z(\Sigma_2)\rangle$ に移す行列．だから full の notation で書くと $Z(M)|Z(\Sigma_1)\rangle = |Z(\Sigma_2)\rangle$ です．

元々やりたかったのは閉じた多様体に数を決めるということですね．形が与えられたとき，たとえば数が 3 とか 4 とか返ってくるのを知りたかった．そのために何か中間状態としてある状態を切って考える．そのときに，ベクトルがあったりとか行列が作用してたりとか，そういう設定を考えるのが自然であるということになります．だからこれは，状態ベクトルが状態ベクトルに発展していくようになる．量子力学とかいう物理の考え方をちょっと使ったんですけども，そうは言わなくてもたとえば，なんかこう，何かを何かに送るわけですね．たとえば行列ってのはベクトルをベクトルに送るわけですね．それと同じように 2 次元に自然に作用しているというのが，対応になります．

このことを見ると分かるようにですね，既に何か鏡映しみたいな関係が見えてきたんですね．上の図は「M という 3 次元の形があって，境界に Σ_1 と Σ_2 がある」ことを表します．そして Z って対応がありまして，Z の行き先で見ると物事は全然変わって見える．2 次元の形がありますよって代わりにベクトルがあって，行列が作用してベクトルになる．鏡の世界じゃないですけど，何か別の世界があるんですね．上側にはある意味，形の世界．形の世界があって，下側は何かというと行列の世界と言っていいかもしれないですけど，ベクトルのなす空間なのでベクトル空間と呼んでたりします．もちろん同じじゃないわけですね．形の世界ってのは穴が何個あってっていう世界で，ベクトルの世界は物としては別なんです．けど，たとえば M の境界が 2 つあるという条件が上手く組み込まれている．元々有る形の情報というのを，上手く別の世界に翻訳してやる．そういうことが起こっている．翻訳してやると，行列の作用みたいな，もっと分かりやすいものが出てくる．そういう翻訳作業が起こってるわけなんですね．



■場の理論とは　実は「この翻訳作業に相当するのが，タイトルにもなっている位相的場の理論というものである」というのが基本的な考え方です．それをもうちょっと説明します．なお，今日の話では場がどうのとかいうのはあんまり使わないので，「何故場が」という話はあんまりしないかもしれない．電場とか磁場とかありますけど，そこはもうちょっと物理のことを勉強されると場というのが何なのか，分かると思います．今日は場そのものの話は全然出てきません．

もちろん翻訳の仕方っていうのも色々あるわけですね．たとえばこの図に色々あって，今はトポロジカルな不変量を得たかったので，トポロジカルな性質だけを用いている．翻訳しているとき，M の形を連続変形しても，行き先が同じになるように翻訳したい．そのときに，この「位相的」場の理論というものになる．一般には，そうでなくて位相的でない場の理論というものを考えても構わないわけです．たとえば形の大きさを変えるということをしますと，出てくるものも変わってくるかもしれない．そういうものはもっと一般的な（位相的ではない）場の理論というものになります．

ものすごく多く広げて言うと，我々が自然科学をやるときの基本的な考え方みたいなところがあります．いまは幾何を強調しているので形だったんですけど，ある意味実際に自然界で何が起こっているかを表している感じなんですね．我々がこういう面の上に住んでいて，暫く立ってみたら穴の数が変わってたみたいな，それは世界で何が起こったかってことなんですね．だから，上にある形の世界は自然界みたいなもの．実際に自然界で起こるかは別として，仮想的な自然という感じかもしれないですけど．あるとき起きてみたら穴の数が増えてたみたいな，そういう世界を考えて，世界をどうやって記述するか．世界そのものじゃなくて，もうちょっと簡単なものを考えたい．そこで下に，何か簡単化されたある種の理論みたいなものを採ってくる．

自然科学者，あるいは数学者が理論を作るというのはどういうことかというと，自然界で色々複雑なことが起こったときに，ある種の単純な理解を得ること．全てを理解するのは難しく，全てを包んでいるわけじゃないかもしれないけど，この世界に落とし込んでやると色々なことが記述できて，元の世界で色々なことが起こると，ある程度がこちらに反映される構造になっている．

■圏の考え方　自然科学っぽく「自然界」と「理解」とか適当なことを言ったんですけど，これはいい加減な言い方で，数学としてはもうちょっと一般の理解があります．実はこれから説明するように，ここにあるものは一つの「圏」というものを定める．圏 category は数学用語です．category 自体は辞書を引くとたとえば「範疇」とかいう言葉が出てきますけども，数学用語としては別に範疇という意味で使ってるわけじゃないです．上に圏 1 というものがあって，下にも圏 2 というものがある．別の圏なんですね．それらの間に一部の構造を上手く写し取ってくる関手，「理論」とか言ったものがあります．関手という日本語はよく分からないですけど，英語では functor．function というのは関数なので，それをグレードアップしたもの．「関数 2.0」みたいな感じですね（笑）．それを functor と呼んでいます．多様体のなす「圏」というある構造があって，位相的場の理論というのは，それを別の圏に移す関手 functor である．そういう理解が一般論です．

言葉を沢山導入しちゃったので，残りの時間で，この辺がどういうことを意味しているのかをもうちょっと詳しく説明して，あとは残る限りで色々発展的なことを話して終わりにしたいと思います．

位相的場の理論というのはある特定の数学的構造に過ぎないんですけど，圏から別の圏に送るという発想は非常に面白いですね．圏論というのはかなり高尚な，抽象的な数学と思われているところもあるんですけど，実は最近，かなり色々な分野で使われるようになっている．たとえば最近流行の人工知能ってありますよね．あとは量子力学，量子コンピュータとかでも，圏論の考え方が使われるようになっています．量子コンピュータを作るときは時間発展があって，コンピュータの中で何か回路を通る．何か状態から別の状態に行く感じになっていて，まさに今言ったのが結構近く，言葉自体はかなり似ていることがあります．

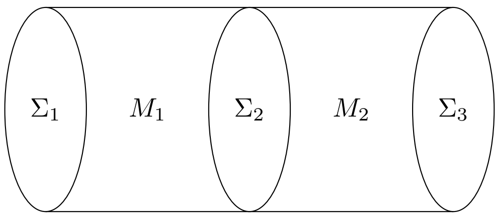
もちろん具体的にどういう圏が出てくるかというと変わります．圏論自体というのはさらに条件を足していかないと抽象的過ぎるんですけども，我々が色々な世界を考えるときの非常に基本的，一般的な枠組みの一つといっても良い．特に圏の考え方には「物とその関係を考える」という，思想として面白いところがあります．だから関数みたいな物の考え方とまた違うところがあります．現代数学では，こういう圏論的な考え方はかなり大々的に使われるようになっている．

■Bordism category　まず圏とは何かってことで，一般的な定義を書いてもいいんですけど，具体例で説明します．今の具体例でいうと形のなす世界である圏 1 とベクトル空間のなす世界である圏 2 というのがあるんですけど，圏 1 には bordism category という名前が付いていて，$\mathbf{Bord}_3$ って書きます．この Bord ってのは bordism という英語の略です．よく本なんかだと太文字にして書く．

圏 $\mathbf{Bord}_3$ には，まず対象 object というものがある．対象というのは 2 次元の面 $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ です．上でいうと 2 つ Σ_1, Σ_2 というのがあった．category はよくカリグラフィーで $\mathcal{C}$ と書いて，$\mathcal{C}$ の object の集合というものを $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と書きます．

そして 2 つ対象があったら，その間に射というのがある．射は morphism と呼ばれます．よくいう写像というのと近いんですけど，写像というと普通の関数に近い感じがするんで敢えて訳語を変えた．多分，昔これを訳した偉い先生が訳を変えたんだと思います．2 つの object M_1, M_2 を持ってくるときに，その間に morphism という集合があります．Homomorphism とも呼ぶので $\mathrm{Hom}(M_1, M_2)$ と書きます．この中に M というのが入っている．射 morphism は何かといいますと，M が向きの付いた 3 次元多様体で，この M の境界が Σ_2 と，Σ_1 の向きを逆にした $-\Sigma_1$．さっきも言いましたが，どっちが始状態でどっちが終状態か覚えておく必要があって，それをマイナス $-$ という記号で表した．$-\Sigma_1$ が始状態で Σ_2 が終状態．境界が 2 つあって，M が形として 2 つの Σ_1, Σ_2 を繋いでいるとき，それが morphism を定める．これはよく cobordism とか書くんですよね．

それからもう 1 つ，まだ情報があって，morphism の結合というやつですね．たとえば Σ_1 と Σ_2 というのがあって，さらに Σ_3 というのがある．これらを M_1 で繋いで次に M_2 で繋ぐ．



すると M_1 の境界は Σ_1 と Σ_2 なので，M_1 は Σ_1 から Σ_2 への射．同様に M_2 は Σ_2 から Σ_3 への射．ここまでは仮定ですね．こういう図があったら今度は，真ん中の Σ_2 を忘れて考えることができるわけですね．忘れて考えると M_1 と M_2 を合わせたものになる．Σ_2 の部分を取っ払っちゃうと，全体に大きな M，ある意味 M_1 と M_2 を合わせたものになる．M_1 と M_2 を合わせてできたやつなので $M_1 \circ M_2$ と書く．これを $M_1 \circ M_2$ と書くか $M_2 \circ M_1$ とどっちで書くかって記号の趣味の問題はありますが，今は $M_1 \circ M_2$ とします．M_1 と M_2 を合わせてきた図形というのがあって，それは 1 番目と 3 番目を繋ぐようになっている．こういうものは，境界に Σ_1 と Σ_3 を持つ．ある意味トートロジーみたいに，自動的にそうなっている．

■圏の抽象的な定義　すごく conceptual な，全部見るとほとんど自明な話ですね．そこを上手く整理している感じです．$\mathbf{Bord}_3$ が圏の例だといったんですが，圏というのは一般的にこういう感じで定義されまして，圏には何らかの対象がある．2 次元の形である必要は無いんですけど，何か対象がある．対象があるから，その間に射の集合が定まる．ここにどういう構造を入れるとか色々バリエーションがあるんですけど，とにかく集合が定まる．その射が 2 つ与えられ始状態と終状態がマッチしていれば，つなぎ合わせることができる．この 3 つの性質，対象と，射と，射の結合を抽象化して得られるものが，圏というものになっています．今の例では，2 次元の形とそれをつなぐ 3 次元の形を合わせたものが bordism category になっている．

■圏 $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$　ここまで来ちゃうとですね，下の圏というのもほとんど同じだなというのが分かるようになります．下の圏 2 の方は何かというと行列だったわけですね．対象が 2 次元の形に associate したベクトルのなす空間．ベクトル空間と呼んでいます．係数が複素数なので，圏 2 には $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ という名前がついてます．これは何かというと，対象はベクトルの成す空間．射というのは行列になっています．ベクトルのなす空間といったとき，成分の数は変わったりするわけですね．たとえば $\mathbb{C}^{n_1}$ から $\mathbb{C}^{n_2}$ のときにサイズが $n_1 \times n_2$ になる．右からかけるか左からかけるか，行にするか列にするかの選択はありますが．今は気にしない[*13]．射の結合は行列の積．たとえば $Z(M_1) \circ Z(M_2)$ と書いたとき．この $\circ$ は行列があったら本当に掛け算しなさいという意味．そして空間の次元がたとえば $\mathbb{C}^{n_1}$, $\mathbb{C}^{n_2}$, $\mathbb{C}^{n_3}$ としますと，行列のサイズが $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_3$ となって，上手く行列の積が定まる．$\mathbf{Bord}_3$ に射の結合があるのと同様，やはり対応したものが，ベクトルのなす空間の方にもある．そういう風になってます．これが下の方，ベクトル空間のなす世界ですね．

■関手　上と下で明らかに両方に parallel な対応がありまして，大体，上で何かが起こると下でも何かが起こる．重要な事は何かって言うと，ちゃんと上の構造を保つように下の構造に移すことです．いま Z って書いた写像みたいなものを functor と呼んだんですけども，Z は翻訳マシーンなんです．翻訳マシーンというのは「射を結合したらこうなります」というのを上手く保ってくれないと困りますね．

射の合成 $\circ$ の意味が上と下で違って，形をつなぎ合わせなさい，ドッキングしなさいというのが上の圏 1 での $\circ$ です．圏 2 の方では行列を掛け算しなさいというのが $\circ$ の意味です．Z というのは，意味は全然違うんだけども片側の $\circ$ を別の $\circ$ に映す．つまり functor は，$Z(M_1 \circ M_2) = Z(M_1) \circ Z(M_2)$ という自然な式で圏の構造を保つことになっています．左右の $\circ$ の意味は違ってて，$M_1 \circ M_2$ の $\circ$ は送る前の積なので圏 1: $\mathbf{Bord}_3$ での積ですね．$Z(M_1) \circ Z(M_2)$ は圏 2: $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ での積．関手は積の構造を保つ．

もちろん関手は，積だけじゃなく 3 つの構造を全部保つ．たとえば object ですね．圏 1 に対象があったらそれに対応する対象が圏 2 にある．圏 1 で対象の間の射があったらそれに対応するものが圏 2 にもある．射を結合したらそれも保つ．それが関手というものです．

言葉を導入しただけなんですけど，実際にどういうことを期待できるかというのが，やや見通しが良くなったというのがあります．現代数学というのはそういうことがあって，具体的にやってるだけなら別に必要ないことでも新しい言葉を導入する．言葉を導入することによって新しい見方が切り開かれることが結構色々起こっているんですね．たとえば圏で見ますと，ある関手を選んでいるんですけど，上から出発して別の関手で別の世界に行くこともできる．さっきは上の圏 1: $\mathbf{Bord}_3$ の世界から下の圏 2: $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ の世界に行ったんですけど，別の圏 3 というものを持ってきて，圏 3 の方に送っても良いわけですね．元の知りたかったことを色々な世界に映してやることができる．そういうことがシステマティックに可能になるのが圏論の世界です．

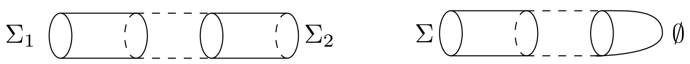
[*13] 左作用で考えるなら，$\mathbb{C}^{n_1} \to \mathbb{C}^{n_2}$ のサイズは n_2 行 n_1 列です．

■位相的場の理論の定式化　ようやく位相的場の理論はなんぞやということなんですけど，普通の数学的な定義は実は，圏 1: $\mathbf{Bord}_3$ から圏 2: $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ への関手 $\mathbf{Bord}_3 \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$．これが位相的場の理論の定義です[*14]．

色々バリエーションは考えられる．Bord と書いたのはトポロジカルな形しか気にしないということだったんですけども，たとえばトポロジーだけじゃなくて大きさ，形を気にするとかいうことをすると，別の圏を選ぶこともできて，それに応じて出発点が変わる．その場合は，圏 1 の方を圏 $1', 1'', \ldots$ とどんどん変更していってどういう構造を足すかを考える．幾何を同じと思うときは何か構造を足すってことだったんで，幾何というのは一番最初に，何をもって同じと思うかを決めた．同様にここでも，何をもって同じと思うかをどんどん変えると，違う圏が出てきて，色々バリエーションがある．しかも行き先も変えられる．たとえば $\mathbb{C}$ と書いてますけど $\mathbb{R}$ としてもいいし，それだけだとあんま面白くないけど，別の圏を持ってきて行き先としてもよい．同じ物から出発しても，圏 1 を別の圏 $2'$ に送ってもよい．そういうことをどんどん考えていくというのが，この話になります．

不変量の話に戻ってきます．こういうものがあるとなんで不変量があるかというと，閉じた多様体に適用すると分かります．境界がない M というのは，境界の Σ_1 と Σ_2 が空ってことですね．厳密には axiom，公理系の中にちゃんと入れておかなきゃいけないんですが，$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \emptyset$ のとき，$Z(\Sigma) = Z(\emptyset)$ は単なる数の集合 $\mathbb{C}$ ということにしておきます，すると $Z(M)$ は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像で，これは複素数をかけさせるような 1×1 行列なので複素数．これがトポロジカルな不変量．いつの間にか含まれちゃってるんですね．

こういう風に定義しておきますと，切り開いたりとかする操作の対応物が $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ 側にある．そういう風に作った．任意の 3 次元多様体を作るとき切り開いてまた貼り合わせる Dehn 手術をしなさいという話を 2 コマ目のちょうど最初に言いました．貼り合わせるという操作についてまだあんまり言っていませんでしたが，たとえば境界付きの形を貼り合わせてもいいし，場合によっては境界がない形をパカッと貼り合わせる．



貼り合わせるという操作に，常に対応して行列の積みたいなものが定まっている．そのため sphere S^3 から出発して穴をぶち抜いて貼り合わせるという操作に全て対応物が存在することになり，不変量を任意の 3 次元多様体に対して定めることが可能になります．それがトポロジカルな場の理論の在処になります．

というわけでようやく，最後の 10 分残ったところで，とりあえず位相的場の理論が何であるかというのを説明しました．数学書なんかを読むと，これが最初から書いてあります．数学の思想というのは結構天下りに出ることが多くて，本などによって，たとえば Wikipedia とか調べると「これが定義です」みたいなのが書いてあるかもしれない．そしたら「圏とは何か」というのを勉強して，という風になる．今日は何でしょうね，最初からそういう導入でよければ「位相的場の理論はこうです」と一番最初に書いてもいいんですけど，今回の講義では天下りに降ってくるとちょっと，と思ったので，何故そういう定義がしたいのかを話しました．

特に今日の講演の概要でいうと，実は物理の考え方が多少入っているという話をしたんですね．今日の話ではそこまで物理の話は入ってなかったんですけど，たとえば時間発展みたいなものを考えるというのは何となく物理っぽい考え方がします．またベクトルと行列を考えるというのは，そこに量子力学的な考え方が入っているんでしたね．最初に「量子場の理論」と言いました．Topological Quantum Field Theory の Q，量子場の理論の「量子」というのが入っているのは，実はこういう，ベクトルがあって行列が作用している，そういうところに現れていることになります．そういうところでちょっとだけ，物理的な考え方を使いました．

[*14] $\mathbf{Bord}_3$ に限らず，一般次元の bordism category $\mathbf{Bord}_n$ で考えることができます．そのときは n 次元 TQFT と呼ばれます．

この抽象的な定義があったとき，たとえばこれを分類しなさいみたいな問題があります．実はこういうものを分類するというのは，僕の知る限り，まだ誰も解けていません．たとえば幾何を分類するって問題を最初言って，その話でずっと不変量を知りたいと言ったんですけど，不変量を知りたいとするとこういう関手，位相的場の理論そのものの分類をしなきゃいけないんですね．じゃあどういう位相的場の理論ができるか．具体例を調べてどこまで調べることができるかという問題が数学として出てくる．ある条件の下で別のものの分類に言い換えることはできるんですですけど，その別のものの分類はまだ成されていない．

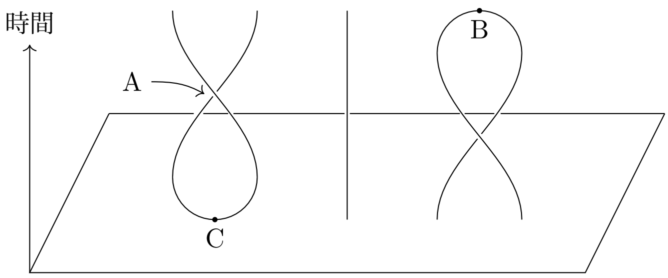
3.3　応用的な話題

抽象的な定義だけだとそんなに物理が入っている感じがしないんですが，具体的な例を作るときに，どうやって作るかということが問題になります．そこに実は物理的な考え方が出てきます．

■位相的場の理論の具体的構成　せっかくなのでもうちょっとだけこの具体的な中身としてどういうものが出てくるかを説明して終わりにしたいと思います．3 次元の抽象的な物をどう具体的に構成するか．ある場合には上手い構成法が知られていて，量子群，普通の意味での群じゃないんですけど，そういうある種の数学構造を使うと出来るという話があります．その辺はまた面白いことが一杯あるんですが，そういう数学の言葉じゃなくて，もうちょっと分かりやすいと思われる言葉で説明してみたいと思います．

3 次元の位相的場の理論．これを何とか別の物から出発して記述したいということがあって，数学的には，1 つの方法として，ここにモジュラー・テンソル圏というのがあります．こういうものがあれば位相的場の理論が構築できるということが知られています．

公理系がややこしいので今日はこれが何かというのは説明しませんが，肝になるのは，大体こういう考え方です．先ほど時間発展という話をしたんですけど，本当にそういう時間発展を物理系で作りたいとする．時間発展が起こると何が起こるかというと粒子がぐーっと動くわけですね．粒子がぐーっと動いて場所が入れ替わったりとか，そういうことが起こったりする．あるいは場合によっては，合わさって消えたりとか．



粒子があって，時間があるとボコッと生まれて入れ替わって消えてとか，そういう操作がどんどん起こるわけです．たとえば，A は brading とか呼んでいて，入れ替わる．それから B は消える．2 個あって，ある時刻に消えちゃう．対消滅とか物理っぽく言います．上方向に時間があって，パカッと消える．C は対生成．ある時間に，粒子が 2 つ生まれる．

モジュラー・テンソル圏というのはものすごくざっくり言うとこういう類いものです．Dehn 手術のときに結び目が出てきたのと無関係じゃないんですが，これは結び目の図とかとかなり似ているというのがあって，こういう図があると大体，位相的場の理論が出来るということになっています．

数学的な定義はあるんですけど，ものすごくざっくり言うと，これは粒子の軌跡になっています，粒子が入れ替わるんですけど，入れ替わるときにまず 1 回入れ替わって，その後にもう 1 回同じ風に入れ替わる．何となく 2 回入れ替わる．普通はですね，粒子が 2 つあって 1 回入れ替わってもう 1 回ぐるっと入れ替わると元に戻ってくるはずなんですけども，実は戻ってこない，なんかちょっと変な性質を持った粒子があります．名前だけ出すんですけど，こういう粒子をエニオンとかいいます．粒子が 2 つあって，時間発展でぐるーっと回るわけですね．ぐるーっと回ると実は面白い事が起こる．そういう現象・構造を記述したのがモジュラー・テンソル圏で，そこから 3 次元のトポロジカルな場の理論ができるということになる．

■量子計算への応用　トポロジカルなものを使って位相的場の理論を作るという話に関連して，実は最近の量子コンピュータをそれで作ろうみたいな話があったりします．すごい面白くて，仮にこういうエニオンという粒子ができると，それで 3 次元の量子場の理論を作ることができるんです．そして量子コンピュータとか，量子技術を使ってコンピュータを作ろうみたいな話のために，こういったものを考える．実際の世の中には誤差とかノイズとかが色々あるんですけど，トポロジカルなものというのは結構そういうエラーから守られているので，上手く計算できる．

エニオンという粒子があると，エニオンという粒子をお互いにぐるっと回す．エニオンを作る．これは本当に実験室で作って，粒子をぐるーっと動かす．どうやって動かすかというのは色々あるんですけど，ある操作でぐるーっと動かしてやると，brading に相当する操作を作ることができるわけですね．実はそういう操作をすると，一番基本的な計算をすることができる．そして基本的な操作をどんどん組み合わせて複雑な図を作って行くと，どんどん複雑な計算をすることができる．そういう風にして量子力学を使った計算というのが，今ものすごくホットになっていて，その 1 つとしてこういうトポロジカルなものを使った手法が研究されている．現状ではこの手法自体はそんなに上手くいってないんですけど，思想として非常に上手く綺麗に出来てるというのはそうなので，将来的にはとても有用になれる可能性があるかと思います．

■最後に　元々幾何学で 3 次元の形を理解したいという問題があり，位相的場の理論はそれを調べるためにたとえば「不変量を知りたい」あるいは「切り貼りをやりたい」みたいなものを定式化する方法として現れました．結論としてはある圏からある圏への構造を保つ関手という，ものすごい数学的な構造になった．ただそれで終わりというわけではなくて，その背後には物理からの考えというのが色々取り込まれています．

ものすごく抽象的に発展したと思われてきた 3 次元位相的場の理論の結果というのが，現在では具体的に速い計算機をどうやって作るかみたいなところまで応用されるにも至ってるし，もちろん物理学の他の色々な分野にも応用されるようになった．位相的場の理論というのは，本当に色々な側面があって，いわゆる数学者という人もやってますけど，純粋に速い計算を作りたい工学部にいらっしゃる方とか，あるいは物性理論の方もやられている．たとえば開成の昔の校長さんが伊豆山さん[*15]といって確か物性理論の方でした．どういう物質を作るのか，そういうところにもトポロジーの考え方が出てきて，本当に色々な所に出てくる．

数学というのはある種の抽象性があるんですけど，抽象性を突き抜けていくと，本当に色々な物事との関連が見えてくる．その非常に上手くいった例の一つが位相的場の理論ではないかと思うので，細かい話はともかくですね，そういう色々な物が集まっている面白さを少しでも感じていただけたら良かったかなと思います．

では終わりにします．どうもありがとうございました．

[*15] 伊豆山健夫 (1932–2021) は東京大学教養学部の名誉教授．磁束ストリングのトポロジーによる酸化物超伝導の諸相の研究などで知られます．1992 年から 2002 年にかけ，開成中学校・高等学校の校長を務めました．

4　質疑応答

■質問　なんでそんな服装をしているんですか？[16]
——それはいい質問ですね．中々複雑なんで一言じゃ答えられないですけど……むしろ「なんでそんな服装をしないのかな」という質問を投げかけたいですね（笑）．

世の中というのは何となく既に「こうあるべきだ」というのを無意識のうちに受け入れちゃってることが色々あると思います．僕みたいになる必要はないと思うんですけど，世の中には色々あって，色々考え直す．人生は余りに短いので，世の中のこと全てを考え直すにはちょっと短すぎる．僕もそういうことはしない．でも時にですね，時に「なんでこうしてるんだろ」とか，よく考えると「あれ？誰かが言ったから何となく受け入れている」ことがある．何でもいいですけどたとえば「なんで 3 回ご飯食べてるんだろ」とか，それはちょっと極端かもしれないけど，色々ですね．別に 3 食食べるなとかいうわけじゃないですよ．

サイエンスとか数学とかの考えのポイントは，どんなに偉い人がこうだと言っても，鵜呑みにしてはいけない．数学というのは証明しちゃうと基本的に正しいので中々間違えることはないんですが，特に物理というのはそうです．物理学というのは学問として面白いんですけど，偉い先生がこういったといって論文を書いた後，「でも実はそれは正しくない」といって他の人が論文を書く．さらに「それも正しくない」といってまた別の人が論文を書く．そういう歴史の積み重ねなんです．

本当に新しいところというのは，今まで既存の概念とか偉い人が言ったこととかを問い直すことによって生まれてくるものだと思います．そういう新しい物を見いだしていくときに，既存の物に恐れない気持ちを持つことは，個人的には重要なんじゃないかと思います．

■質問　今回の圏の話でトポロジーを考えた理由は？
——トポロジーは一番粗い分類になっているので，理論として単純な場合になっている．もちろん枠組み自体はすごく一般なので，別の圏も使える．

実際の世の中って距離とか重要じゃないですか．距離とか大きさとか．パンの大きさが大きいか小さいかって重要じゃないですか．そういう構造を取り入れて考える．別の圏を設定して，そこからの関手を考えるというのは，ある意味別の理論を考えるのに近いと思います．問題毎にそれを設定する．

ここでは非常に特殊なことをやっていて，トポロジカルな世界はある意味変なもので，距離がない．たとえば今コロナで 2m 開けろと言われているわけですが，トポロジーの世界ではそんなこと言わないわけですね（笑）．2m というのはなくて，「0」か「0 でない」かしかない．重なってなければ離れている．そういう変な世界がトポロジカルな世界．

そういう世界ってすごく変な気がするんですが，実はそういう世界って世の中にこっそりとある．世の中に重さがあると対応した長さのスケールってものがあるんですけど，そういう長さのスケールよりもエネルギースケールが小さいところに行くと長さの効果がなくなるって話があります．低いエネルギースケールだとトポロジーの構造が入っていることが知られている．ある意味世の中の綺麗な部分だけを抽出してきたところには，トポロジカルなものがあるということになる．

[16] この日の山﨑先生の服装はタンクトップに短パンで，11 月下旬にしては寒そうにお見受けしました．

物理学全てを数学に乗せたいという野望があったとしたら，当然トポロジカルな条件を外して，じゃあどうやって拡張するかということをする．それはものすごい重要な問題で，それを解くと少なくとも 1 億円もらえる．ミレニアム問題という問題[*17]があって，そのいくつかは基本的にその問題になる．

たとえば今日の場の理論には「トポロジカル」が付いてたんですけど，トポロジカルを取っ払うと実は一般の場の理論というものが知られています．一般の場の理論をどうやって数学的に定式化するかというのは，ものすごく重要な未解決の問題です．

■質問　圏 $\mathbf{Bord}_3$ を考えたとき，割とトポロジーのことをお話なさいましたけど，弦理論では Riemann 面というのが world sheet で，3 次元多様体 M というのは brane になっているんでしょうか？

——それは色々な設定があります．弦理論には元々 world sheet と target というものが両方あるんですね．world sheet からすると，1 次元の弦 string が動くと 2 次元になるという描像なので．どちらかというと出てくる図は $\mathbf{Bord}_3$ より 1 つ下の次元になります．一方 string 理論の中に膜 membrane が入っているという話があるんですけど，その膜を使って同じようなことをやろうとすると，2 次元の膜とその間をつなぐ 3 次元の形という話になって，この圏 $\mathbf{Bord}_3$ とほとんど同じものになる．これは topological membrane theory，トポロジカル M 理論という感じになっています．中々難しい理論なんですけど，それに近いような感じになっています．

まともに M 理論と弦理論とかやろうとすると，さらにここに色々な計量の情報とか入れて，それを足し上げる．そういうことをすると，M 理論の定義みたいなのものが出る風にはなっています．一概には言いがたいんですけど 2 次元と 3 次元では色々違うことがありまして，色々な研究があって，3 次元で時間発展させていきますとトキトキッとした角みたいなものが生えてきちゃうみたいな話があります．角みたいなものが生えてくるとあんまりエネルギーが入らなくてどんどん伸びていっちゃう．滑らかな多様体から出発しても時間が経つと段々そういうトキトキになってきちゃって，なんか普通の記述ができない．それは membrane の不安定性と呼ばれている現象で，そういう問題点が有るので中々，その方法を直に使って M 理論に迫ろうという動きは今のところ上手くはいっていません．その代わり，もうちょっと違う方法，たとえば行列みたいなものを全部置き換えるとか，色々な双対性を使って別の記述をするとか，迂回路みたいなものが考えられています．

あともちろん，今のは world sheet ですけど，target の方に 3 次元多様体がありますみたいな話はあって，そういうときはどちらかというと超弦理論というよりはこの手の位相的場の理論みたいなのが出てくるという感じです．

■質問　Riemann 面が出てくるからといって，それが常に world sheet だというわけではない？

——そうですね．Riemann 面自体も，実は target の方で出てくることもありまして．90 年代の初めの頃の超弦理論では world sheet がすごく重要視されていたので，常にそちらの方で話を進めようと，いつも 2 次元の話をしていた．でもある種の超弦理論が発展した 90 年代半ばからは，target の方に Riemann 面が出てくる話が結構発達してきてて，総合的な感じになっています．どちらに出てくるかによって設定はかなり違います．

[*17] 2000 年に入って，Clay 数学研究所が 100 万ドルの懸賞金をかけた問題が 7 つあります．ここで挙がったのは，そのうちの「Yang–Mills 方程式と質量ギャップ問題」です．