2023 年度数学特別セミナー
曲線の長さ，曲面の面積などの話題から

(Some topics relating to lengths of curves and areas of surfaces)

述: 小野 薫 * / 記: 林 正人 †，穂坂 秀昭 †，宮崎 哲朗 †

2025 年 3 月

概要

開成学園では毎年，現役の数学者に講演していただく「数学特別セミナー」を開催しています．2023 年度第 2 回は，京都大学数理解析研究所の小野薫先生をお招きし，「曲線の長さ，曲面の面積などの話題から」というテーマでセミナーをしていただきました．このノートは，その講演の内容をまとめたものです．

なお，脚注はいずれも本校教員が付け足したものです．小野先生にお話していただいた内容は全て本文中に含めています．また，このノートの文責は，誤りも含め，全て本校教員にあります．

目次

0 今回のセミナーの概要 2

1 曲線の長さと凸性 2
- 1.1 曲線の長さ . . . 2
- 1.2 準備: 三角不等式と三角関数 . . . 4
- 1.3 凸曲線と凸領域 . . . 4

2 曲面の面積 6
- 2.1 曲面の面積 . . . 6
- 2.2 等距離地図の不可能性 . . . 9

3 Crofton の公式 13
- 3.1 曲線の長さの積分表示 . . . 13
- 3.2 Crofton の公式とその帰結 . . . 16
- 3.3 測地線全体のなす空間の形 . . . 18

4 Poincaré の最後の幾何的定理 21
- 4.1 定理の主張と証明 . . . 21
- 4.2 ビリヤード写像 . . . 25

5 高次元球面の体積 26

* 京都大学数理解析研究所 教授

† 開成中学校・高等学校 数学科 教諭

0　今回のセミナーの概要

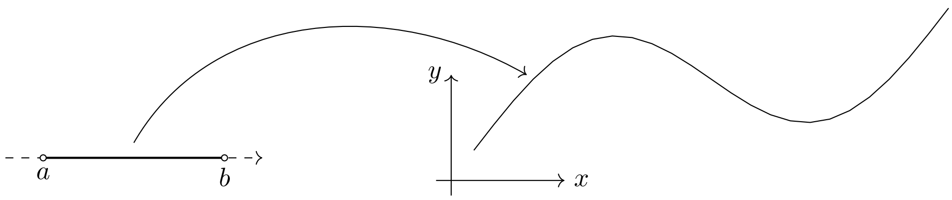
曲線，曲面についてその長さや面積について幾つかの考察をする．2 つの閉じた曲線が凸に曲がっている時は，一方が他方を内側に含んでいると長さあるいは面積に大小関係があることがわかる．次元が高い球面は目には見えないが，その（次元の高い場合の）体積は意味のある量で，大学初年級の微積分で例題として扱われる．この話の後半では，それとは違った方法による高次元球面の体積を求めてみる．そこで使われる数学は大学初年級のものではないが，雰囲気を伝えられればと思う．

1　曲線の長さと凸性

今日お話をしたいのは，幾何学的な話です．直線の長さとか曲面の面積とか，そういうのはどこかで聞かれたり，あるいは実際に計算されたりしてると思うんですけども，そういうのから始まって，少しその先の数学をお話したい．

■曲線とは　きちんと定義するとそれだけで結構大変なことになるのであまりきちんと言いませんけれども，平面上に描かれている曲線を考えます．いま平面に x 座標とか y 座標が入っていると思うと，一つの定義の仕方としては，x 座標と y 座標が決まればいいわけです．実数の一部分で 2 つの値に挟まれているような区間，あるいは実数全体でもいいんですけれども，そういうところから平面上の点を，2 つの実数が対応をするものでパラメータ付ける．2 つの関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ との組で曲線上の点をパラメータ付けるというわけです．

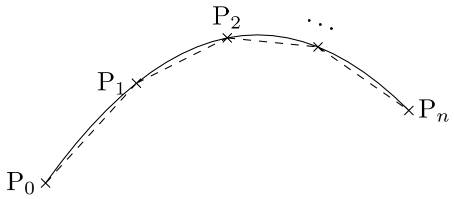
$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$



言葉をご存じの方に向けていうと，関数 f_1，f_2 には微分ができるもの，場合によってはさらに 2 回 3 回と微分ができるものを持ってきます．我々は「滑らか」といいます．曲線が尖ってないという状況は，どっちかの微分が消えていないという条件と同じわけです．

1.1　曲線の長さ

曲線の長さというのを考えたい．どう定義すればいいのかというと，近似的に考えるわけです．平面の上にある線分の長さ，それは分かっているとします．そこで曲線上に分点をたくさん設定して，$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$ から始まって，最後を P_n とします．これらを線分で結んであげて，線分の長さで $\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}, \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}, \ldots$ を考えます．



そうすると折れ線が元の曲線の近似だから，「曲線の長さ」と呼ばれるものがあるとすれば

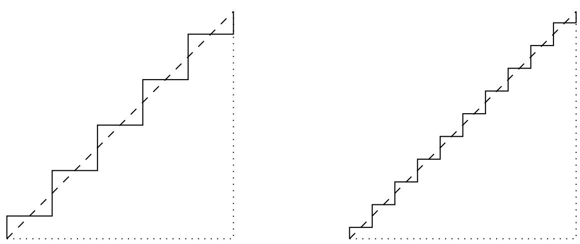
$$\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}+\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}+\cdots\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$$

という式で近似できるのではないか，と思うわけです．

言葉をあまり習っていないかもしれないけれども，曲線の長さを，極限として定めましょう．n を増やして分点をどんどん増やし，どんどんどんどん細かくしていったときの折れ線の長さを「極限」といいます．直感的には「どんどん近づいていく値」というので結構です．ここで，分点をとって細くしていくやり方はたくさんある．いろんなとり方があって，等間隔に取ってもいいし，ある 2 点の間が他より近いということもあるかもしれない．いずれにしても，隣り合った 2 点を結ぶ線分の長さがどんどん小さくなる極限を取る[*1]．

ここで注意すべきことに，曲線の長さというのは，いわゆる連続という条件だけで確定するか分からないんです．つまり長さが有限の値に決まらないものがあるわけです[*2]．けれども，さっき「滑らかな曲線」ということを言ったんですけれども，大ざっぱには各点に接線が引けるようなものであれば長さが定まる．こういう事実があります．

もう 1 つ注意をしますと，曲線に近づけていくような折れ線なら何でもいいのかといったら，そうではないんです．ここに線分があったとして，ギザギザのものでどんどん近似して，でっぱってる部分を小さくしていき，細かくやっていけば斜めに寄り添っていく，そういうような状況を考える．当たり前のことですが，ギザギザの長さは一定．このギザギザは斜めの線分の近くにいるんだけれども，ギザギザの長さは全部足してみれば結局横と縦の和ですから，変わってない．いくら斜めの線分に近づいていったからといって，たくさんの折れ線の長さは，斜めの長さとは全く違う．



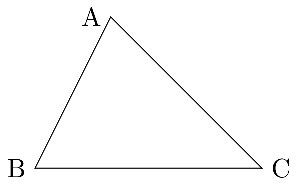
接線方向に近似するという考え方では，曲線の上に点が連なっていくとき，隣り合う点を結ぶ線分がどんどん接線方向に近づいていく．だけど今のギザギザの例はそうではなくて，縦向いたり横向いたり，接線と方向が合わないもので近似しているんです．長さを近似するには，単に寄り添っているだけではだめなんです．このことは，後で曲面のお話しをするときにも出てきます．

[*1] 滑らかな曲線を持って来ているので，分点の取り方によらず，細かくさえすれば極限が定まることが知られています．

[*2] 有名なものには，Koch 曲線があります．  $\to \cdots$ というルールで折れ線を細かくした極限を考えると，長さが無限大の曲線になることが知られています．

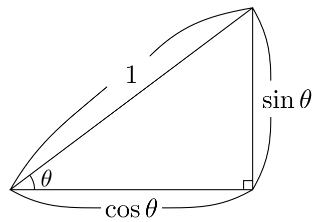
1.2　準備: 三角不等式と三角関数

■三角不等式　いわゆる三角不等式と呼ばれるものがあります．3 角形 ABC があったときに，AC の長さというのは，AB の長さと BC の長さの和で上から抑えられます．これが三角不等式．今日使うことはあまりないんですけれども，後でちょっと出てくると思います．



$$\overline{\mathrm{AC}} < \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}}$$

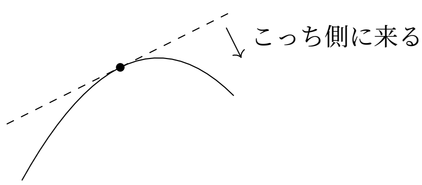
■三角関数　それからもう一つ使いたいのは，三角関数．三角関数そのものを扱うわけじゃないし，あんまり必要でもないですが，後である部分を簡潔に書きたいので，ちょっと出します．直角 3 角形があったとして，斜辺の長さを 1，左下の角度を θ としたとき，縦の辺の長さを $\sin\theta$，横の辺の長さを $\cos\theta$ といいます．



いま $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で図を描きましたけど，この範囲を超えて三角関数を拡張することもできます．ただ，今日は大体はこの範囲で足ります．

1.3　凸曲線と凸領域

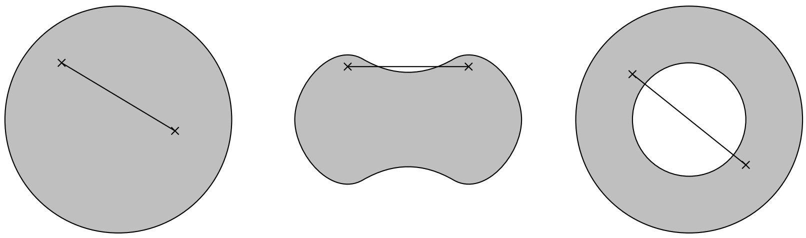
■凸曲線　事前の案内にも書いていたことなんですけれども，凸な曲線というものがあります．凸曲線というのは何かというと，曲線の各点で接線を引いたときに接線の片側に来る曲線のこと．ある意味で曲がり方が同じ向きに曲がっているということなんです．



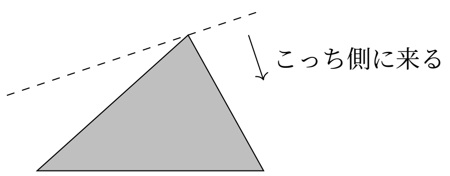
もっと強い凸性というのもあるんですけど，これが今日使うものです．「接線の片側に曲線が含まれる」ぐらいの理解で十分です．凸性は局所的な性質で，大域的には各点でこの性質を仮定します．

ちなみに私が最初に助手（今でいう助教に相当するポジション）をした東北大学には凸体，トーリック多様体というのをかなり精力的に研究されている偉い先生がいました．あるときに誰かが「凸」という字を書いたんだけれども，ちょっと書き方がおかしく，その先生が「凸というのは漢字だから書き順があるんだよ」と書き順から指導していました．

■凸領域　平面の中に勝手な曲線が囲む 2 次元的な領域を持ってきたときに，この中で勝手に取った 2 点を結ぶ線分がその領域に入るなら，凸な領域という．たとえば円板だと内部の 2 点を線分でどう結んでも内部に含まれるから，円板は凸．一方，円板を少々くぼませたものを考えると，中央のあたりで 2 点結ぶのはいいんですけれども，端の方で 2 点とって結ぶと一旦外にはみ出しちゃう．円環も，左上と右下のあたり結ぶと外出ちゃう．だから，こういうのは凸じゃない．



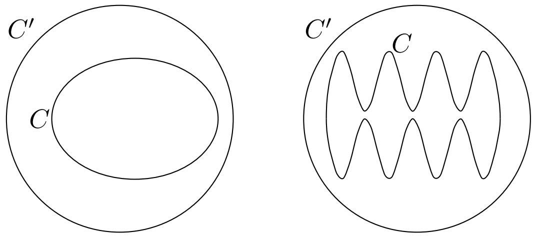
今日は滑らかなものを主に扱うのですが，3 角形みたいに尖っているものも凸な曲線の仲間として入れても結構です．凸領域があるとき，境界が滑らかかというと，一般にはそうじゃない．例えば 3 角形を描いたら，内部の 2 点を結ぶ線分はみんな内部に含まれるから，凸なんです．だけど境界は尖っている．尖った点で「接線」が何を指すのかということですけれども，ここで頂点だけを含むような直線を引くと 3 角形は片側に来ますから，そういう意味では凸といってよい．



いいですかね．凸曲線は，滑らかなら局所的には接線の片側に入っている．さらに閉じた曲線，端点が異なる開いたものではなく出発点に戻ってくるようなものを閉凸曲線という．閉凸曲線というのは，凸領域の境界．境界という言い方は馴染みがないかもしれないけれども，日常用語で言うものと同じで，内側と外側を分けるもの．

■凸曲線の長さ　凸曲線の中に別の凸曲線が入っていて，中が C，外が C' とします．凸曲線 C というのが C' が囲む中に入ったとする．C' は凸でも凸でなくてもよい．このとき C の長さというのは，C' の長さで上から抑えられる．

もちろん C が凸曲線でなければ全然そんなことはないわけです．凸曲線の中にグニャグニャした曲線を入れ，行って帰ってを増やすと C の長さはいくらでも大きくできます．凸でないと反例がある．

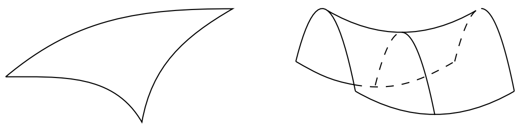


「この事実を，ある角度から説明しましょう」というのが，一つの大事なことなんです．特に C と C' が折れ線で出来ている，つまり線分が連なってできている場合，そのときは実は初等的に証明ができます．それをちょっと考えてもいいかなと思って書いたんです．きょうは滑らかな曲線であることを使います．折れ線評価というのは考えてみてください．

曲線の長さが折れ線の長さの極限で定義されていたことを考えると，包含のある凸曲線の長さに関する不等式は折れ線の場合から従う．つまり，C とか C' というのが滑らか曲線だとして，分点を取ってどんどん線分で近似していって近似値を取る．近似値の大小関係は分かっているから，後は極限を取るという操作で C と C' の長さの大小が分かる．このように，初等的にも理解される．

2　曲面の面積

今度は曲面．曲面のかけらをちょっと描きます．こういうもの．



3 次元座標空間の中に，こういうようなものがある．馬の鞍みたいになっているようなものですね．わかりますかね．何を描いているかというと，放物線みたいな絵を描いて左右に動かすんだけど，ただ平行に動かして柱面にするんじゃなくて，上がって下がってがある．そういうのを考えましょう．

2.1　曲面の面積

■曲面の面積の定義　こういう曲面の面積を考えましょう，というのが大事なんです．曲がった部分の面積はちょっとデリケートなんです．曲線のときを思い出すと，線分の長さが既知だったから，それを基にして測りましょうと言ったわけです．分点をたくさんとってきて線分でつないで，長さを足した．面積の場合も，平面内に描かれている 3 角形でも 4 角形でもいいんですけれども，例えば平行四辺形の面積はどうなるかとか，長方形だったらどうなるかとか，それは分かっています．それを駆使して曲面をどうするか考えます．曲線のときに分点をたくさんとったんだから，曲面でもたくさん取って点を点をつなぐ．点がたくさんあるから，点を線分でつないで，そこに 3 角形を貼ってみましょうといって，曲面を 3 角形なり 4 角形なりで近似しましょうと考える．曲面の上に点をたくさん取って，それで同じように多面体近似してやります．曲面上に点をたくさんとって，多面体として，その面積の極限を取ったらどうなるか．

ちょっと考えてみますと，実はそれではうまくいかないんです．さっきの場合に大事だったのは，隣り合う 2 点を結ぶ線分と各点での接線が近いことなんです．たとえば 2 点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$ を結ぶ線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ があるけれども，隣り合う 2 点を結ぶ線分と P_0 での接線や P_1 での接線は，同じじゃないんだけれどもほぼ同じ方向を向いています．曲面の場合でも，実はその曲面 S を近似した多面体の各面と元の曲面の接平面を考える．接平面が全く近くないと上手く行かないわけです．

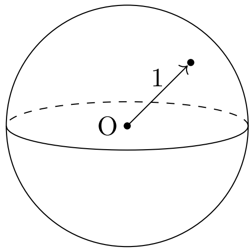
たとえば円柱でやってみると上手くいかない例がある．円柱で多面体近似をしましょうというとき，うまく多面体近似をすれば面積がちゃんと出るんです．でも特別な方法でたくさん点をとり「多面体で曲面を近似して面積を求めよう」とやると，そうもいきません．それは例が昔からよく知られているんです[*3]．

[*3] 反例として，Schwarz の提灯という図形が知られています．いわゆる「ダイヤカット缶」と呼ばれる形です．

で「じゃあどうするのか」というわけなんですけど，これ，単に細かく点を取って曲面を近似するのみならず「接平面と多面体の各面が近い」という条件も込めて近似しないといけない．そうすると，さっきと同じように，多面体の各面の面積の和が面積になります．

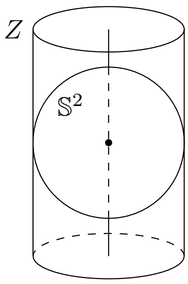
■球面の面積　訳の分からないことを言っているように思われると思うので，面積がどういう風に決まっているかというのが一番簡単に分かる例をお話ししたいんです．

球面というのは，球の中心というのがあって，そこからの距離が一定．何でもいいんですけど，中心と呼ばれる点を原点 O にして，O を中心として，たとえば半径 1 という球面を考える．こういうのが単位球面と呼ばれるものです．



(x, y, z) と座標があるとき，原点との距離が何で与えられるかといったら，$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ です．だから原点を中心とする単位球面は $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ です．$\mathbb{R}^3$ と書いたのは実数が 3 つ並ぶという意味です．

表面積を計算するのは，Archimedes がやったと言われています．Archimedes がどういう風にやったか紹介します．球面 sphere の次元が 2 なので，単位球面を記号で $\mathbb{S}^2$ と書く．単位球面に軸がある．我々が書いた座標だと，$x = y = 0$ で z だけが任意の数，というのがある．それから，軸に平行な円柱を考える．円柱の記号は Z とする．Z は，(x, y, z) で z は勝手に動いていいんだけど，x, y について条件をつけて，$x^2+y^2 = 1$ を満たすもの全体，$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\}$.



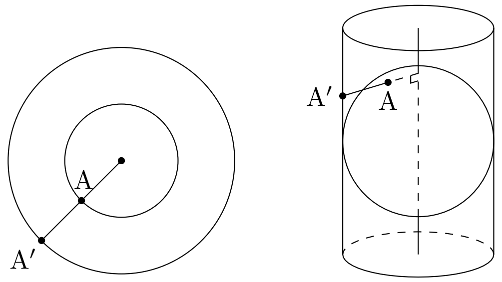
このとき高さが一致しているところを考える．$\sqrt{x^2+y^2}$ は xy 方向での原点からの距離ですから，円柱 Z を xy 平面と平行な面で切ってあげると単位円がずっと並んでいる．z は何でも構いません．さらに Z の中で，最後の z について $-1 \leq z \leq 1$ という制約をつけて $Z_{-1 \leq z \leq 1} = \{(x, y, z) \in Z \mid -1 \leq z \leq 1\}$ とする．そうすると高さが揃って $\mathbb{S}^2$ から $Z_{-1 \leq z \leq 1}$ に写像ができそうなんだけども，ぴったりはできないんですね．ぴったりはできないんだけど，次のことができる．$\mathbb{S}^2$ から $(0, 0, \pm 1)$ の 2 点を引きましょう．北極と南極はダメなんだけど，z 座標が ± 1 の点を除いた球面から円柱 $Z_{-1<z<1} = \{(x, y, z) \in Z \mid -1 < z < 1\}$ に写像を作りましょう．球面上の (x, y, z) という点に対して，x と y を $\sqrt{x^2+y^2}$ で割って，最後を z にする．

こういう写像を考えるんです:

$$\Phi\colon \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to Z_{-1<z<1}; (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z \right).$$

z が ± 1 を外れていればよい．いま $z = \pm 1$ だと，$x^2+y^2 = 1-z^2 = 0$ になっちゃう．だから，この $(0,0,\pm 1)$ のときだけは Φ で行った先の分母に 0 が入ってくる．そこだけダメだから定義域から外しましょう．後は分母が 0 じゃないから割れますねというのが，写像を定義する式に込めた意味です．

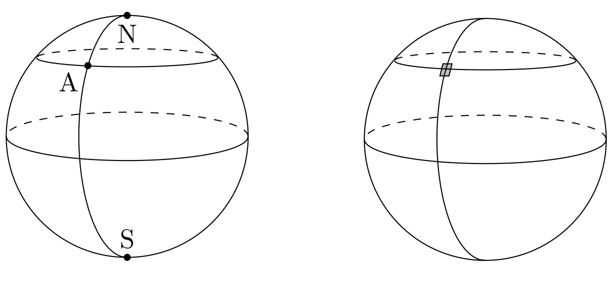
これ何やってるのかといわれたら，何でもないことです．球面に 1 点があったとき，同じ高さの点を軸から放射状に出して，円柱の上に持って行きます．



軸に直交する平面で見ると，軸というのは平面との交点としてつぶれて 1 点に見える．軸を中心とした単位円が円柱です．それから A という点が見えていて，それが外側の A′ に行き着く，A′ というのは何かというと，軸を端点として A を通る半直線を伸ばしていくと，円柱にぶつかる点があって，それが A′．軸があって，軸から放射状に点を円柱の上へに移しましょうと．そういうことをやっている．

この写像が面積を保つことを示しましょう．これが示されたら球面の面積はすぐに計算できるわけ．というのは，円柱の高さは $1-(-1)=2$ ですよね．で，円周の長さは何かというと 2π．高さは 2 で，$2\times 2\pi = 4\pi$ というのが円柱の表面積．これと一致するので球面の表面積が求められる．

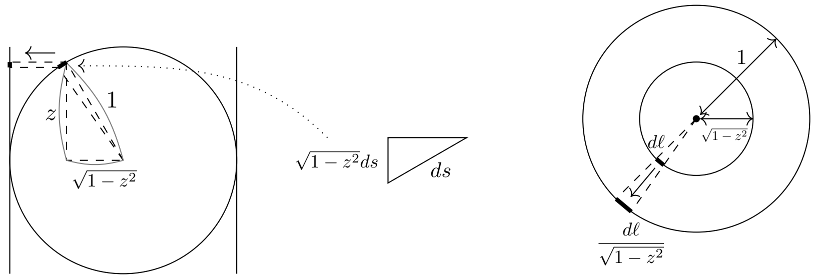
どうして面積を保つのかというのを考えてみる．この絵をまず見ていただきますと，球面があって，この上に点があって，そこに接平面のかけらを書きます．いくらでも小さいものを考える．



このかけらが円柱面にどういう風に写像されるのかというのを考える．北極があって，南極があって，これらを通るような大円があります．大円とは何なのかというと，原点を通るような平面で切った球の切り口．いまの大円は，北極と A を通るようにしたいから，北極と中心と A を通るような 3 点を取って，その平面での切り口を見る．もう 1 つ，A を含むような水平な平面で切る．高さ z だけは固定して，x, y は全部勝手に動いてよいという平面．

この接平面のかけらの縦横がどんな風に拡大縮小されるかというのを見てみる．球面から円柱への写像を Φ とすると，Φ により，水平方向の辺が拡大される．それから，縦の z 軸方向が縮小される．これらが実は相殺して，1 になるわけです．横に 2 倍して縦に半分にして面積が変わらない，みたいな．軸を含む平面で見てみ

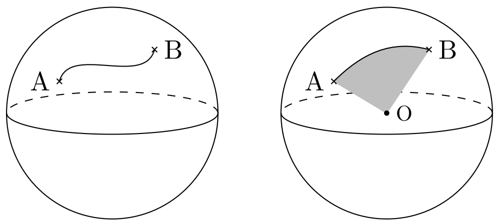
ると切り口に接線が引けるんですけど，これを円柱に移すと，接線のかけらは，長さが $\sqrt{1-z^2}$ 倍に短くなる．一方で，上から見ると接平面のかけらは円周上の微小な線分のように見えていて，$\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ 倍に拡大される．この縮小率とこの拡大率が相殺しあって，面積としては同じになる．この Φ というのは面積を保つ．



2.2 等距離地図の不可能性

次に等距離地図はできないという話をする．円柱というのは母線で切ると平面に広げることができる．だから，$\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,\pm1)\}$ は写像 Φ を通して，ぐるっと 1 周はしてるけど局所的には平面的に広げられる円柱という図形に，面積を保って移される．また，方角を保つという等角地図というのもある．だけども，距離を保つ地図はできない．

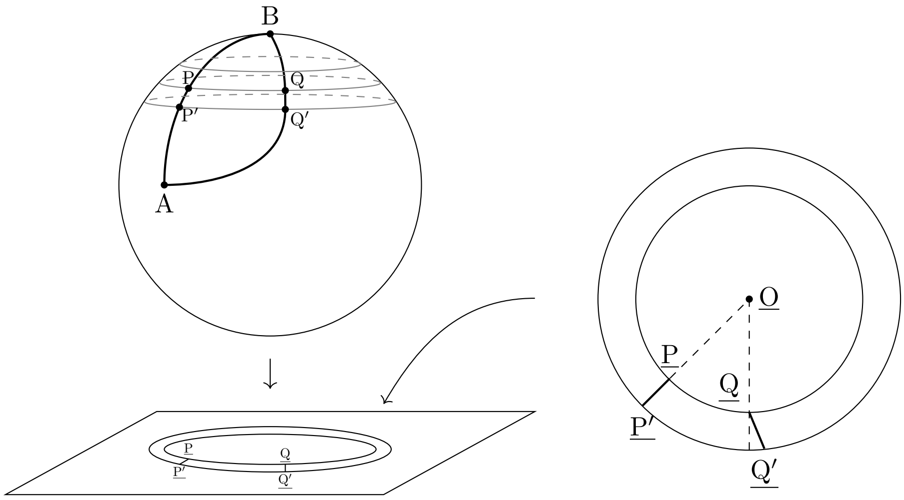
■球面の測地線　球面があったときに，球面の上に 2 点 A, B を取り，A と B を球面の上で繋ぎ，その長さを測る．単なる 3 次元空間内の曲線じゃなくて，曲線なんだけども，それが球面の上に乗っかっているようなもの．その球面の上に乗っているものの中で長さを考えます．ここで，長さは普通の 3 次元空間で測った長さ．その最小値はどうなるのか，どのような曲線か考えてみる．



結論は多分聞かれたこともあるかもしれないし，知っていると思うんですけれども，大円の弧．大円の一部でつなげればいい．つまり今，中心 O と，それから A と B というのがあるから，3 点 O, A, B を含む平面で切り口を考える．この大円の弧が一番短い．

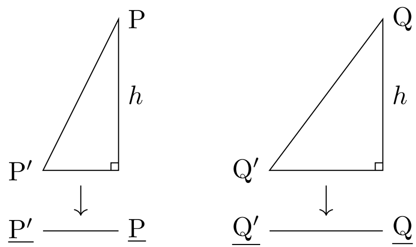
どうして大円の弧が一番短いのか，その理由を少し考えてみましょう．球面というのは非常に対称性が高いので，回転させて B が北極にいるような状況でものを考えます．実は北極に持ってくる必要は別にないんですけれども，絵を描くときに北極に持って行ったら描きやすいから，北極に持って行きます．すると点 B を通る大円の弧は縦になる．

大円ではない他の道を通ったらより長くなることをいう．これ，大円は緯度方向ですね．赤道のところは緯度 0 度．点 A から点 B まで動くにつれ緯度が単調に増えていく状況を考えます．単調じゃなくて上がったり下がったりしてもいいんだけれども，簡単のために単調なものを考えます．それで，大円と直交する小円をたくさんとる．つまり平行な平面をたくさんとって，上に描いた平面は上の小円と交差し，下に描いた平面は下の小円と交差する，そういう状況を考える．このとき，小円でスライスされた区間で線の長さを比較します．



点は (x, y, z) と 3 つ成分をもっているんですけれども，これを上から (x, y) しかない世界に平面に射影して考える．何が見えるかというと，1 つ円があって，それを含むように少しだけ大きい円がある．縦軸に沿って射影したら軸のところが中心になりますから，同心円ができる．道との交点というのは，これらの上に書かれているわけです．そのときに同心円と道の交点に名前をつけましょう．大円の像は $\underline{\mathrm{P}}$ と $\underline{\mathrm{P}'}$，勝手な道の方は $\underline{\mathrm{Q}}$, $\underline{\mathrm{Q}'}$ とする．そうするとわかることは何かといったら，$\underline{\mathrm{P}}$ と $\underline{\mathrm{P}'}$ の距離は，$\underline{\mathrm{Q}}$ と $\underline{\mathrm{Q}'}$ の間の距離で抑えられる．$\overline{\underline{\mathrm{P}}\,\underline{\mathrm{P}'}} \leq \overline{\underline{\mathrm{Q}}\,\underline{\mathrm{Q}'}}$ となる．下に落として見ると，大円の方は中心から放射状になっている．もう 1 つのを見てみると，そうとは限らない．勝手な経路だからよくわからない．だけど中心と $\underline{\mathrm{Q}}$, $\underline{\mathrm{Q}'}$ の間に線を引いてみると，さっきの三角不等式で $\overline{\underline{\mathrm{O}}\underline{\mathrm{Q}}} + \overline{\underline{\mathrm{Q}}\,\underline{\mathrm{Q}'}} \geq \overline{\underline{\mathrm{O}}\,\underline{\mathrm{Q}'}}$ となるわけです．一方で，$\overline{\underline{\mathrm{O}}\,\underline{\mathrm{Q}'}}$ は大きい同心円の半径で，$\overline{\underline{\mathrm{O}}\underline{\mathrm{Q}}}$ は小さい同心円の半径だから，これらの差は $\overline{\underline{\mathrm{P}}\,\underline{\mathrm{P}'}}$ と同じです．だから $\overline{\underline{\mathrm{Q}}\,\underline{\mathrm{Q}'}} \geq \overline{\underline{\mathrm{O}}\,\underline{\mathrm{Q}'}} - \overline{\underline{\mathrm{O}}\,\underline{\mathrm{Q}}} = \overline{\underline{\mathrm{P}}\,\underline{\mathrm{P}'}}$ となる．

これら 2 つの同心円は，落とす前は水平な平面に含まれていました．それらは水平ですから，間の高さ，z 座標の差は一定なわけです．そうすると，P から下の平面に垂線を下ろすと 3 角形が書ける．Q からやっても同じ絵が描ける．



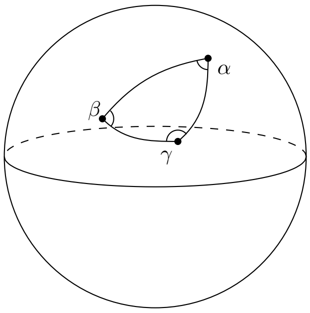
こういう絵が両方見えていて，高さは両方とも h．斜めの長さ $\overline{\mathrm{PP}'}$ と $\overline{\mathrm{QQ}'}$ がですね，落とすと $\overline{\underline{\mathrm{P}}\,\underline{\mathrm{P}'}}$ と $\overline{\underline{\mathrm{Q}}\,\underline{\mathrm{Q}'}}$ になっている．直角 3 角形が 2 つあって，底辺のところが $\overline{\underline{\mathrm{P}}\,\underline{\mathrm{P}'}} \leq \overline{\underline{\mathrm{Q}}\,\underline{\mathrm{Q}'}}$ を満たしているから

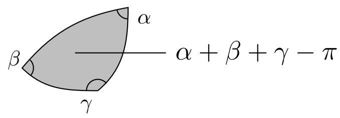
$$\overline{\mathrm{PP}'}^2 = h^2 + \overline{\underline{\mathrm{P}}\,\underline{\mathrm{P}'}}^2 \leq h^2 + \overline{\underline{\mathrm{Q}}\,\underline{\mathrm{Q}'}}^2 = \overline{\mathrm{QQ}'}^2$$

より，PP' の長さは QQ' の長さを越えることはない．つまり小円の間を線でつないだときに，ここにまっすぐ下りてくるものと，ちょっと寄り道するようなものがあって，まっすぐでない方が長さは短くなることはない．それがずっと積み重なっていくわけです．結局大円でいくのが一番短くなる．これ上下に行って帰ってしてたら距離を稼ぎますから，ますます短くなれません．だから，結局どんな曲線を引いたとしても，今ぐらい

のことで大円に沿って動くのが最短だということがわかる.

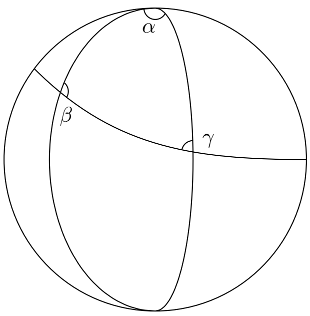
■球面 3 角形の面積　大円弧が最短線と分かったので，次のことを考えるわけです．いま球面の上に 3 点取る．地球だとちょっと大きすぎるけれど，適当な球面があって，その上に 3 点 A, B, C があって，その間が一番短くなるように AB, BC, CA を全部大円弧でつなぐ．大円というのは測地線と呼ばれるものの特別な場合なので，こういうのを一般には測地 3 角形と言ったりする．頂点 A, B, C に出来る角の大きさをそれぞれ α, β, γ とする．そうすると何が起こっているかと，$\alpha+\beta+\gamma-\pi$ がこの 3 角形の面積になっている．



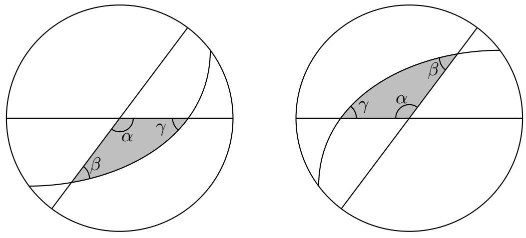


平面幾何の場合には，もちろんこんな公式は成り立たない．平面上に A, B, C と 3 点あったときに，A と B, B と C, C と A を最短線で結ぶということは，線分で結ぶということ．普通の 3 角形ができる．そしたら，3 角形の内角は π に等しいから $\alpha+\beta+\gamma-\pi=0$ になっているわけで，この公式は全然成り立たない．平面で成り立っているのは，内角の和は π だということ．でも球面の世界では π じゃなくて面積分だけ増える．

どうして面積分増えるのかというのを，これから説明します．これは，球面の表面積が $4\pi r^2$ という事実だけで分かる．それを説明しましょう．大円を 3 つ持ってきて，2 円が交わってできる角度が α, β, γ とする．どうすればわかるのかということですけれども，また 1 つの点を北極に持って行って絵を描きます．

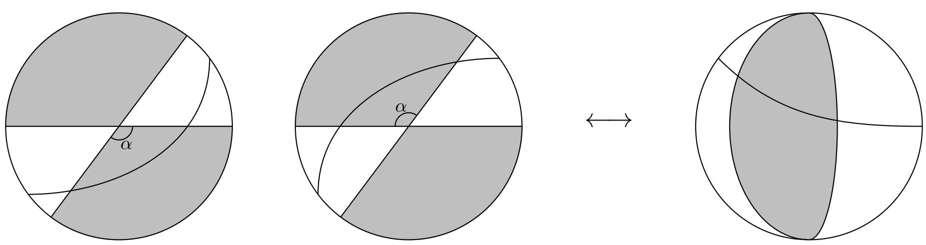


透明な球面の上に 3 つ大円が描かれてるのを頭の中で想像してもらって，真上から見た絵を描きます．そうすると，上半球と下半球，北半球と南半球があります．それらを上から見る．北極を通る大円を上から見たら，それは直線に見える．だって軸を通る平面で切っているから．だから上半球を上から見るとどうなっているかというと，そういうのが 2 つ見える．もう一つは直線には見えない．北極通ってないから別のものなんですけど，その 2 つは原点からちょうど対称な位置にある．今度は下半球を通して見る．南半球が上から全部透き通って見えるとする．上にぐるっとやる．

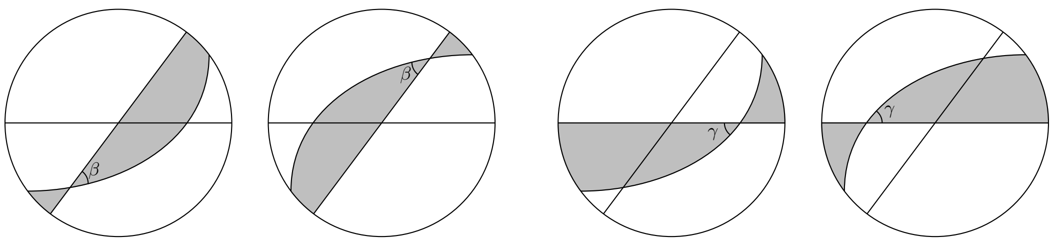


上から見た図　　　　下から見た図

囲まれた 3 角形の面積を求めてくださいというのが，問題ですね．原点，球面の中心から対象な位置にある．下の図で示した扇形は，原点対称だから同じ面積．これで，直線に見えている大円で挟まれた部分の面積が測れる．球面の面積は全体で 4π だったんですね．そして北極を通る 2 つの大円のなす角度が α だから，真上から見た角度も α．この角度 α が 2 つある．1 周するのが 2π で，そのうち 2α を考えるから，帯の面積の割合は $\dfrac{2\alpha}{2\pi}$．全体の面積が 4π だから $\dfrac{2\alpha}{2\pi} = \dfrac{\alpha}{\pi}$ 倍にすると，$\dfrac{\alpha}{\pi} \times 4\pi = 4\alpha$ が直線に見える大円で挟まれた部分の面積.



同じようなことを残り 2 つの内角でもやる．3 角形の内角のところで，交わった region を絵で描く．今度はですね，β 側を塗る．同じように計算すると，面積は $\dfrac{\beta}{\pi} \times 4\pi = 4\beta$ になる．もう 1 個は，角度 γ をなす大円で囲まれる部分．角度 γ を使ったやつがあって，面積は $\dfrac{\gamma}{\pi} \times 4\pi = 4\gamma$ になる．



これで面積が全部計算できた．全部足して，重なっている球面 3 角形の部分が原点対称に 6 回数えられているというのを頭に入れて，計算しますと，球面 3 角形の面積がわかります．面積を S とすると，$4\alpha + 4\beta + 4\gamma - 4S = 4\pi$ だから，$\alpha + \beta + \gamma - S = \pi$.

これで球面について，平面の上に距離を保った形では地図を描けないことが分かった.

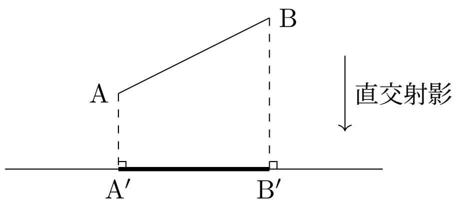
3　Crofton の公式

曲面の面積の話からもう一回曲線の長さに戻ってきて，一つお話をしたい．次にお話ししたいと思っているのは，Crofton の公式という，曲線の長さに関する公式です．これがあると，予告に書いた「凸な曲線が別の曲線に入っていたら，内側の凸の曲線の方が短い」というのは，たちどころに分かる．

3.1　曲線の長さの積分表示

いま線分 AB があったときに，その長さをもちろん知ってるわけです．座標で書かれた距離の公式があるので．ここで 2 点間の距離，線分の長さというものを，別の観点で見る．何かと申しますと，線分は平面上にありますので，いろいろな方向に直交射影できる．座標軸でもいいし，何でもいい．とにかくいろんなところに直交射影する．

直交射影という言葉を聞いたことがなければ，それはこれだけのことです．直線が 1 本引かれていて，線分上の各点から直線に垂線を下ろして，その垂線の足を対応させるというのが直交射影．点 A, B に対応する点をそれぞれ A', B' とする．像も線分になりますから，AB の長さと同じように，直交射影した $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ の長さももちろん考えることができる．方向を決める毎に直交射影を考えて，像に現れる線分の長さを考える．

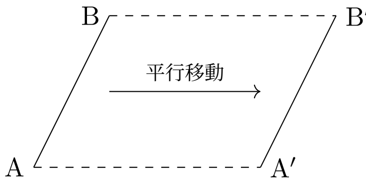


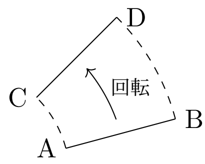
そんなものをやったって元より短いものが出てくるわけで，「何が面白いのか」と思われるかもしれません．ここで方向を色々変えてみます．あらゆる方向への射影を考えて，その「平均」を取ることを考える．ここで，方向は円周でパラメータを付けられているわけです．単位円には原点があり，単位円周上に点があったら原点を通る半直線が出来ますから，単位円上の点は方向を指定する．方向が決まれば射影が出来る．ただし射影する先は直線で，対蹠点は同じ直線を表すから，ダブりがある．π だけ回ると反対側の直線になる．だから方向と角度は 0 から π まで．それで平均取れといっている．

この平均という意味，もう少しきちんと言った方がいいと思います．連続的に動かすときその平均が何かっていうと，結論をいうと積分が出てくる．積分を積分区間の幅で割ったのが平均なんです．積分をあまり知らないという人に向けて言うと，円周を 100 等分して分点での値を足して 100 で割る，あるいは 1000 等分して分点での値を足して 1000 で割る．そういう，どんどん分点を増やして値の和を取って，何等分したかその数で割りなさいというのが平均．分点の数をどんどんどんどん増やしていった時に，さっき曲線の長さを定義したときと同じように極限がある．極限が決まるというのが積分するということなんです．だから積分がよく分からなかったら，平均というのは値を十分たくさん取って，それで値を足して分点の個数で割る．そう思っていれば大丈夫です．

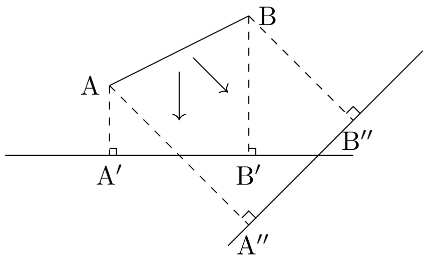
あらゆる方向を考えるというのが大事です．線分の長さというのが，この 2 点にとってどういう性質を持っているのかと考えてみる．まずは平行移動不変．ここに A, B という 2 点があって，それからこれを平行移動したものを A', B' としたら，AB の長さと $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ の長さは同じ．もう 1 つは回転ですね．点を取って，それを

中心に回転させてみる．回転後の線分を CD とする．回転させても 2 点間の距離は変わらないから，線分 AB の長さと回転した線分 CD の長さは同じです．この平行移動と回転というのは距離を保つんですね．2 点間の距離を保存してくれるような平面における基本的な操作．こういったもので長さが変わらない．





いま A, B を決めて直交射影した長さを見るとき，平行移動したって同じですよね．あらゆる方向に対して，どう平行移動しても直交射影した長さは同じです．だけど回転させちゃったら，射影した線分の長さは変わっちゃう．1 つ方向を決めて考えてみる限り，値は変わっちゃうわけです．だけど「あらゆる方向について考える」ということをすると，同じなんです．なぜかというと，線分だけじゃなくて，射影する方向というのも込めて回転させることができるわけですよね．

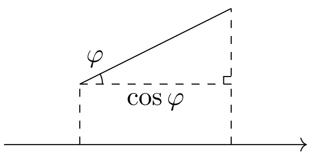


そうすると AB が CD に回転したときに，射影した像 A′B′ の長さと C′D′ の長さは射影させる方向まで回転させれば同じ．紙に 1 つ絵を描いて紙ごとを回せば，この回転させた絵が出てくる，回転させるとき射影の方向も変わっちゃうんですよ．AB を回転させると同時に射影する方向も回転させて考えたら，あらゆる方向で考えてるんだから，回転前にあらゆる方向を考えても回転後にあらゆる方向を考えても同じ．

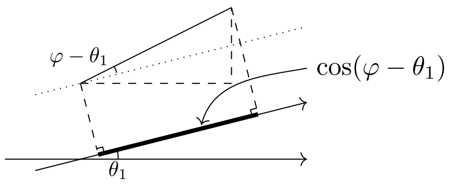
だからあらゆる方向を考えて平均を取る，あるいは積分値を取ると，回転の前後で変わってないです．そのことだけ分かっていただければいい．つまり AB の長さというのは，比例定数が何であるかは計算しないといけないんだけど，あらゆる方向への直交射影による AB の像の長さの平均として表せる．

$$\overline{\mathrm{AB}} = C \times (\text{あらゆる方向への直交射影による AB の像の長さの平均})$$

平均というより，本当は方向 θ についての積分と言った方がよいのかもしれない．例えば線分があって，水平方向から測った角度を φ として，水平方向の直線へ直交射影をする．長さが 1 だったら，像に出てくる長さは $\cos\varphi$ になります．



この絵を頭に入れて回転のことを考える．一つ基準となるような方向を取って，それを $\theta = 0$ とする．それが少しずれて他の θ の方向になるとき，周りがどう変わるかを見る．直線の向きを表す角度が θ_1 になると，θ_1 方向と線分のなす角度は $\varphi - \theta_1$ になる．元々の長さが 1 ですから，像の長さは $\cos(\varphi - \theta_1)$ になる．



角度が色々変わるとき，cos の符号が変わると嫌だけど，絶対値を付ければ怖くない．だから結局，全体で積分するというのは

$$\int |\cos(\varphi - \theta)|\, d\theta$$

という式になる．1 つ決まった方向があって，そこから見たときこの単位線分がどう傾いていくかを見ている．直線が色んな方向を取るといったんですけど，どこからどこまで積分するんですかといったら，$\theta = 0$ のときは基準の方向で $\theta = \pi$ まで行くと反対方向になります．だから 0 から π まで積分．すると cos の絶対値を積分しなさいっていうんだけど，これは計算すると

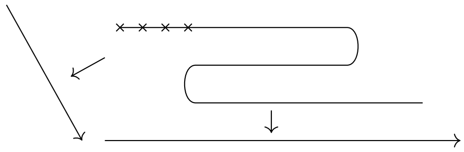
$$\int_0^\pi |\cos(\varphi - \theta)|\, d\theta = 2$$

になる．積分区間が 0 から π になってるので，平均といったら本当はこれを π で割って．

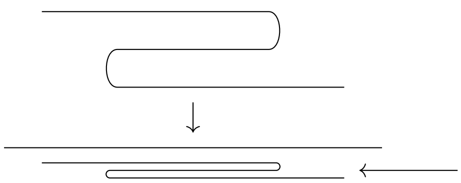
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos(\varphi - \theta)|\, d\theta = \frac{2}{\pi}$$

にする．線分の長さが 1 のときに平均が $\dfrac{2}{\pi}$ なんだから，比例定数 C の値は何かというと $C = \dfrac{\pi}{2}$ になる．これが単位線分をあらゆる方向に直交射影した長さの平均を取ってあげた結果．後の話では平均を取るという話からずらして，比例定数を落とす形で積分そのものの話をします．

そうするとですね，勝手な曲線があったとき「曲線の長さを積分で書きましょう」って同じことができるんですよ．何故同じことができるのかといったら，その上にたくさん分点を取って，線分で繋いでいってやればいいわけです．ずっとやっていけばよい．線分の長さの和で曲線の長さが近似できていて，各線分については積分表示が分かっているわけです．個々の線分をあらゆる方向に射影して平均するのを，ずっとやっていけばいいわけです．



射影すると向きによっては行って帰って行ってとなっているから，各方向について「のべ」の長さを考えて，それを平均すればいい．曲線をあらゆる方向に直交射影して，この「のべ」の，つまり行って帰って行ってという行程の距離を全部足しなさいといってるんです．のべの長さで平均あるいは積分するというわけです．



あらゆる方向に射影してのべの長さを平均したら，元々の曲線の長さはこの折れ線で近似するんだから，積み重ねていって曲線の長さが分かる．

3.2 Crofton の公式とその帰結

■Crofton の公式　2 点間の距離とか線分の長さは分かっているのに，何で馬鹿みたいにこんなことを言うのかということを思うかもしれないですが，ちょっと見方を変えてこれを言い換えたのが，今日言いたい Crofton の公式というもの．Crofton の公式というのはですね，ちょっと見方が違うんです．本当は長さが確定したとか，いろいろ書かなきゃいけないんですけれども，ちゃんと長さが定まる曲線 C に対して，C の長さ $L(C)$ は，C とあらゆる直線との交点数の積分に，定数倍を除いて一致する．「定数倍を除いて」というのは，比例定数があるということ．比例定数は計算することができるけど，ちょっとそれはおいておく．

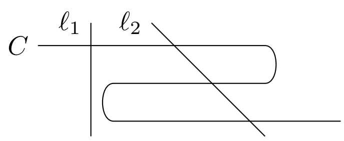
記号をちょっと用意します．平面上の直線全体という集合を考える．集合という言い方をするより空間と言った方がよいのかもしれないけど，何にせよこれを $\mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2)$ と書く．$\mathbb{R}^2$ というのは，平面という意味（原点とか指定するわけじゃないから本当は $\mathbb{R}^2$ と書くべきじゃないですけど）．Geod と書いているのは，さっきから測地線といっている，最短線の一般化みたいなものです．測地線を geodesic というので，その頭を取って今こう書いた．

すると $L(C)$ というのは，ある定数 k があって

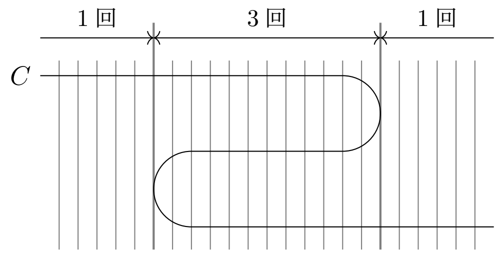
$$L(C) = k \int_{\mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2)} \#(C \cap \ell) d\mu(\ell)$$

という積分の形で書ける．本当は積分するときの「単位」をきちんと言わなきゃいけないんですけど，あんまりちゃんとやりたくない．何も書かないとあれだから，$d\mu(\ell)$ と書いておく．これ何ですかというとちょっと言えないんですけど，面積あるいは体積を測る目盛りみたいなものです．それが決まってないと体積が決まりません．そういうものがこの $\mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2)$ には定まっている．これについては，あともう一回戻ってきます．k はある定数．

曲線 C に対して勝手に直線を引きます．図において左の方で適当に直線 ℓ_1 を引くと C と ℓ_1 の交わりは 1 点です．これを $\#(C \cap \ell_1) = 1$ と書く．もう少し右に ℓ_2 があると 3 点と交わりますから，$\#(C \cap \ell_2) = 3$ と書く．こういうように直線を与える毎に C との交点を勘定して，勘定した値を平均なり積分なりするというものが，さっきの積分なんです．



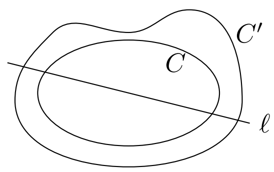
何なんだと思うんですね．さっきは方向を決めて直交射影して，そこの長さを書きなさいと言った．こっちはよくわかんないけど，突然直線を持ってきて交点数えて，それを積分なり何かする．これらはどういう関係なのか．難しいことはなくて，直交射影の絵を見てもらうんですけど，直交射影するってことは何かと言ったら．直交する直線をちょっとずつ平行移動させながら引いて，射影した長さを見なさいと言ったんですね．今度はその代わりに交点を数える．左の方は 1 回交わるんだけど，真ん中ら辺になると同じ直線が 3 回交わっている．



もう少しこの絵の場合を説明してみます．接線になる特別な場合で分割して考えると，左の部分はただ行っただけです．中央のところは行って帰って行く．右の部分はそのまま行く．だから交点数で考えてみると，左の部分に関しては 1 回分，真ん中の部分は 3 回分，右の部分は 1 回分数えるという風にする．直線との交点数を積分するという訳の分からない計算は，方向さえ決めてしまえば，刻む直線の間の距離で自然に大きさが測れそうです．さっき積分で $d\mu(\ell)$ とか何か言ってるのは，この幅を書きなさいといっているものです．左の幅には 1，真ん中の幅には 3 を，右の幅には 1 をかけて足す．そうすると，のべの長さが出てくる．この計算を全ての方向の射影について行う．だから積分は，あらゆる直線の向きを考えて，それぞれの向きについて平行な直線族で積分するという，1 変数の積分ではなくて 2 変数の積分なんです．とにかくまず一つ方向を決めて積分領域を平行な直線族に制限したとき，直交射影したときののべ長さというのは，ちょうどその 交点数 $\times$ 幅 と理解される．それをあらゆる向きで考えて平均する．

あと，積分したり極限取ったりという操作が交換しますかという微妙な問題もありますが，そういうのは全部横に置いとくとする．

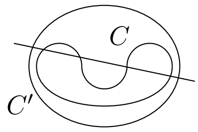
■閉凸曲線の長さの評価　長さをあらゆる方向の積分で表す話を分かってもらえたら，もう少し言い換えて Crofton の公式が理解できる．最初に線分の長さを知りたいと思って「そんなの定義があるからもういいんじゃないか」というところからスタートしたんですけど，あらゆる直線との交点数を積分するという見方が出てくる．そうするとさっき言ってた，包含される凸な曲線の長さの大小がわかります．外は凸じゃなくていいんだけど，曲線が囲む中に凸な曲線の絵がある．



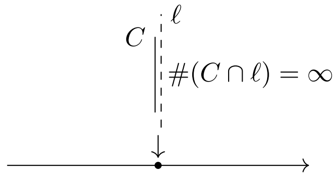
そうすると交点数の積分を，中の C と外の C' の両方でやればよい．$L(C)$ と $L(C')$ はどちらも，同じ比例定数 k で，同じ空間 $\mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2)$ での積分で書ける．じゃあ直線引きましょう．直線がどこから入ってきてどこから出るかといったら，C' のところに入って出るから，必ず 2 点では交わっている．場合によっては C と全く交わらず，$\#(C' \cap \ell) = 2$ なのに $\#(C \cap \ell) = 0$ となることもある．

凸な図形を考えてみるとわかるんですけれども，凸な領域の境界にある 2 点をつなぐと，2 点の間はずっと内側なんです．境界から外に出ない．だから C が凸であるとすると，C と ℓ は高々 2 点でしか交わらない．だけど C は C' に含まれていますから，この直線を伸ばしていけば，いずれは C' とぶつかってしまう．だから，ℓ が内の C と 2 点で交わっているんだったら C' とも必ず 2 点で交わるということになる．つまり $\#(C \cap \ell)$ と $\#(C' \cap \ell)$ の間には $\#(C \cap \ell) \leq \#(C' \cap \ell)$ という不等式がある．大きな数で平均する方が小さい数で平均するものより大きいか等しいかだから，$L(C)$ より $L(C')$ の方が長いんです．

外が凸で中が凸でないのになってたとすると，中の方の長さが長くなるかもしれない．たとえば直線が外とは 2 点でしか交わらないけど，中では 4 点で交わることがある．直線上を辿ったときの場所が C の外，内，外，内，外……というふうになってくると，交点の数が 2 個以上になってくる．だから不等式 $\#(C \cap \ell) \leq \#(C' \cap \ell)$ が成り立たないので，内側の長さの方が外側の長さより長くなる可能性がもちろんある．C が凸でないとこうなることが起きうる．



もう一つ言ってないことがあります．積分するときは普通，ちゃんとした扱えるような関数が書かれてるはずなんです．けど，交点数は整数に値を取る関数で値がジャンプする．さらにもっといやなのは直線を垂直な方向に直交射影してしまったとき．あらゆる向きに射影した長さを考える方法ですと問題ないんです．このときには点になってしまうので，直交射影したときの長さは 0 で別にいいんです．だけど交点数を積分する形を取ってくると，考えている直線と射影方向の垂線は，無限個の点を共有する．そういうのは差し引いて考えなきゃいけない．



というわけで，ちょっとその辺微妙なところがあります．積分が決まるというのはどういうことなのかとか，そういうことをきちんと言わなきゃいけないのだけど，そういう悪いことが起こるところは，面積を測る上では無視できるくらいのもので，そこを除いても積分が定義できる．いわゆる測度論というやつが隠れているんですけど，ちょっとごまかして今話をしているんです．こういうのが Crofton の公式であります．

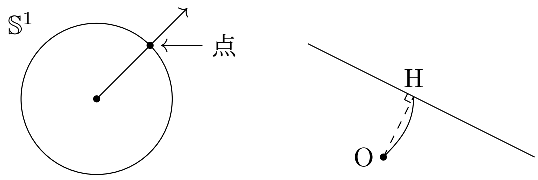
3.3 測地線全体のなす空間の形

で，Crofton の公式を話しましたけど，今言ってくれたことをちょっといいましょう．この空間 $\mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2)$ は何ですか，と．

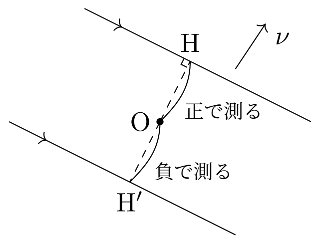
> **■質問** 無限の長さの円筒みたいなものですか？
> ——はい，そうです．結論はそんな感じです．

どういう風に考えたらいいかという話ですけど，$\mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2)$ をパラメータ付けようと思うんです．さっき言ったように，曲面というのは局所的には 2 つのパラメータで書けている世界．直線のときは 1 個のパラメータだったんですけど，曲面のときは 2 次元の広がりがあるからそれをパラメータ付けと思うわけですけど，どうしましょう．何もしないで普遍的な座標，パラメータ付けが取れるというと，それはない．だからどうするかといったら，平面に 1 点を固定します．平面から 1 点を選び，それを原点とする座標を入れるとパラメータ付けができる．その 1 点を，原点になるべきところだから O と書く．平面に O という点があったら，この空間をパラメータづけることができる．

さっき言ってくれたように，$\mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2)$ は実は円柱状になるんですけれど，それはどういうことでしょうか．以下，直線に矢印をつけて右向きにするのか，それとも左向きにするのかというのを選んで，向きを付けた直線で考える．どうパラメータ付けるのかというと 2 つあって，まず方向があります．向き付けられた直線の方向は単位円 $\mathbb{S}^1$ でパラメータ付けられる．それから，向きを決めた後に平行な直線の族をどうパラメータ付けるか．それは原点から直線に垂線を引いて，原点と直線の距離をもう一つ新しいパラメータにする．



直線 ℓ というのを平面上の直線全体の空間 $\mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2)$ からとってきたときに，$\ell \in \mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2)$ に対して 2 つのパラメータが入っている．1 つは $\mathbb{S}^1$ で，これは方向を単位円で指定するもの．ただし「直線には 2 方向あるじゃないか」と言われるかもしれないから，向き付けられた直線を考えましょうということで，$+$ をつけ $\mathrm{Geod}^+(\mathbb{R}^2)$ と書く．そしたら方向ベクトルとして単位ベクトル，長さ 1 のものを 1 つに決めることができる．もう 1 つは何かというと，いま直線に向きがあります．そうすると，単位方向ベクトルを反時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回すと，新しい矢印ができる．この矢印の方向というのは，垂線と平行になるわけ．そうすると，H は O から見て，ν の方向にどれだけ行っているか測れる．例えば，ν について反対向きもう 1 個平行な直線が引いてあるとき，そっちの長さは負向きに測るんです．



だんだんベクトルという言葉を使いたくなるんですけど，例えば ν というのを単位法線ベクトルという言い方をするんです．単位法線ベクトルをとってくると，さっき書いた対応は，O から H へ向かう $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ ベクトルと ν の内積を取りなさい，ということ．

$$\text{有向直線 } \ell \mapsto (\nu, \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \nu)$$

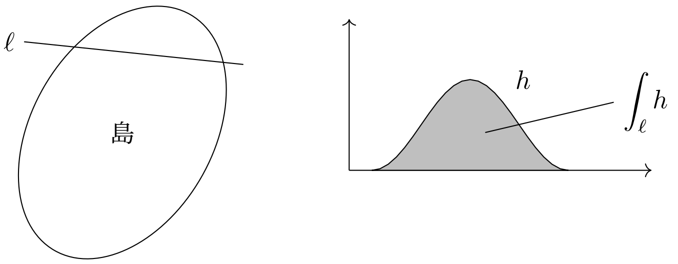
内積が分からないというときには，直交する向きを得るには，向きが付いている向きの方向に対して反時計回りに 90 度，$\dfrac{\pi}{2}$ 回してください．その方向が正向きだと思って，O から見て同じ方向にどれだけ行ったのか．同じ側は正で反対側は負．それを書いたら上の式になる．

向きを忘れたらどうなりますかというと，ℓ がちょうど反対向きになってきて $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \nu$ が逆になります．いわゆる同値関係というんですけど，割ってやったものがプラスのない $\mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2)$ です．

$$\mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Geod}^+(\mathbb{R}^2)/\{\pm 1\}$$

これで $\mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2)$ のパラメータ付けができた．そうすると，測地線の空間には自然な面積要素みたいなのがあって，何か面積の議論ができる．そうやって出てくるのが Crofton の公式での積分なんです．

■Radon 変換　続けて古典的な話をします．この辺に何かこう，島があります．島があったとすると，外は海で，境界は標高 0 なんです．島の各点に高さというのがある．島を平面で切ってみると，切り口に島の形が見えてます．断面で島の高さの関数が分かり，その面積を考えることができる．直線を引いて，その直線のところで垂直にぶった切って切り口を見て，そこの面積を見る．そうすると元々はこの平面の上で高さという 2 変数の関数が定まっている．そこからこの直線の上に新しい関数を作ることができるわけ．h と書くと，$\int_\ell h$ というものを考えることができる．



つまり，元々は島の上の高さという関数が本当に平面の上で決まっているんですけど，それをこの直線と垂直な面で切って面積を見ることで，何かよくわかんないけど，直線全体のなす空間 $\mathrm{Geod}^+(\mathbb{R}^2)$ の上に新しい関数が広がる．元々 h っていうのは 2 変数関数のデータ $h(x,y)$ なんだけど，このデータが何か別の空間の中の関数に変換される．

何が嬉しいかというと，ある状況においては，色々な方向に積分した値を知っていると元の関数 h が決まる．実は変換後のデータから変換前のデータを復元できる場合がある．どういうふうに使われるかというと，たとえは島が見えていれば高さが上から見て分かるけど，それができない場合がある．入れ物の中に何か物があって，その物質の密度みたいな関数が与えられたときに，その物質の密度みたいなものを容器なりなんなりを開けずに分かるか．たとえば光なのか放射線なのか何かを流していくと，もともとある強度で入れたものが，出てきたときに途中で吸収されて出てくるわけですね．入ったものがどこまで弱まって出てくるかというようなことを観測をすると，元の関数がわかる．だから変換後の関数が分かったら変換前の関数が分かるという状況では，中を開けることなく，様々な光なり放射線なりを通して観測されるデータをもとにして，元の形がわかる．そのような数学的な意味が，CT スキャンとかの背景にある．こういうのを（逆）Radon 変換といいます．逆変換が，元の形を復元する方．Crofton の公式が直接関係してるわけじゃないんだけど，まあ，同じような舞台で数学ができる．

現実問題の場合は，もちろんそれだけで済むわけではない．いろんな観測には誤差があったり何かしますから，そういうときに厳密にできるわけはない．たとえば島の上にたくさん点を取ってきて，値を決める．いろんな方向を考えて和を取りなさい，和をとった値が全部分かっていますよ．すると連立できるわけですね．逆変換するというのは，連立方程式解けますかというわけですね．方程式の個数が変数の個数より多いかも知れません．そこに誤差が出てきたら，数学でやったら普通は「解なし」で終わりです．でも現実にはそれじゃダメなんですね．誤差付きで解かないとダメなんです．そういった話があります．

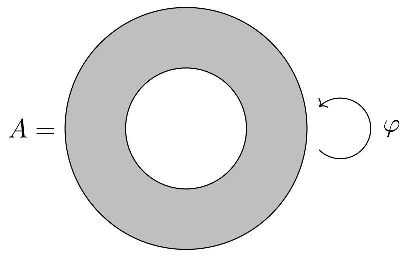
4 Poincaré の最後の幾何的定理

よく考えてみると，球面の体積の話をここで話すのは中々難しいかもしれないので，ちょっと時間があったら最後に話すことにして，別のお話をします．

Poincaré の最後の幾何的定理，Poincaré の last geometric theorem という話をします．実際に完全な証明を付けたのは Birkhoff で[*4]，それは 1900 年代の前半のことです．

4.1 定理の主張と証明

ステートメントはどういうことかといいますと，円環状の領域から自分自身に写像があるとする．



写像っていうのは，この中の点をまた別の点に移すもの．点を決めたときに別の点が出てくる．たとえば関数というのは実数に実数を対応させるもの，実数から実数への写像となります．今の場合は，φ というものが点を別の点に対応させる．ここで使われるものではないんだけど，たとえば回転させましょうとか，そういうようなものが写像です．

この φ が全単射で次の 3 つの条件を満たすとする．

- φ が内側の境界を内側の境界に，外側の境界を外側の境界に移す．
- φ は内側の境界と外側の境界を逆向きに回す．たとえば下の方を反時計回りに回してたら，外の方は時計回りに回す．これをねじれ条件という．
- φ は A のどの領域 Ω に対しても「Ω の面積 $=$ $\varphi(\Omega)$ の面積」を満たす．これを面積保存という．Archimedes による球の面積の計算では，球面の接平面のかけらについて，球面のどの領域をとって考えても，円柱面に放射状に射影したところの面積で面積保存が成り立っていた．

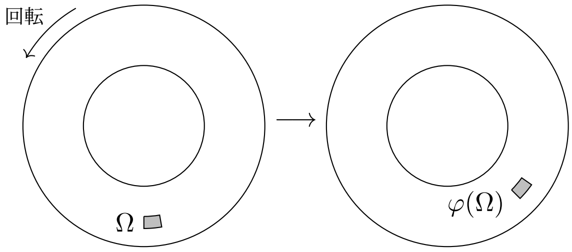
こういうことを前提とする．そうすると結論は何かというと，φ は少なくとも 2 つの不動点を持つ．不動点は何かというと，φ で動かない点，固定点．つまり P が φ の不動点というのは，$\mathrm{P} = \varphi(\mathrm{P})$ となること，というわけです．

■反例　ねじれ条件と面積保存があるんですけど，このどちらを外してもこの主張は成り立たない．どちらを外しても定理の主張が成立しない φ がある．

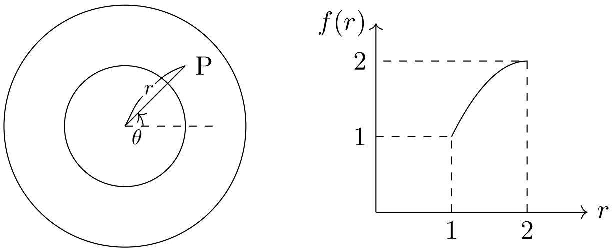
上のねじれ条件を外したときは簡単で，円板をちょっとだけ，たとえば $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させる操作がある．2π の整数倍でなければ角度は何でもいいです．もちろん原点は動かないんですけど，円環領域の中に原点は入ってないんです．この 2 つの円で囲まれてる部分で考えると，ここ $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させると，こんなものは不動点を持

[*4] G. D. Birkhoff, “Proof of Poincare’s Geometric Theorem,” *Transactions of the American Mathematical Society* **14** (1), pp. 14–22. doi:10.2307/1988766

たないんです．だけど回転だから面積を保ってます．どんな領域 Ω を取って来ても回転前後の面積は等しいから，面積保存の条件を満たすけど，ねじれ条件は満たされていない．そして実際，φ は不動点を持たない．



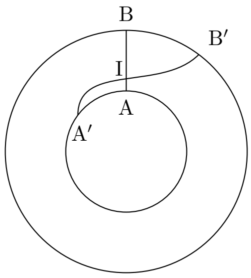
面積保存を外した方も考えれば分かります．座標を入れます．座標は原点からの距離を r として，基準となる角度を $\theta = 0$ として，r と θ で点 P のパラメータ付けをします．たとえば内側の円周の半径を 1，外側の円の半径を 2 とする．そうしたときに r を関数で決める．境界を境界に移さなきゃいけないから，$r = 1$ のところは $r = 1$ のところに移さなきゃいけないし，$r = 2$ のところは $r = 2$ のところに移さなきゃいけない．ここのところを何でもいいんですけど，$f(r) = r$ よりも大きい単調増加な関数で繋ぐ．本当に強い意味で上に凸な関数にする．



(r, θ) に対して，r を $f(r)$ に移して，θ の方はたとえば $\theta \mapsto \theta + \pi - \dfrac{3}{2}(r-1)\pi$ にする．何やってるかというと，$r = 1$ のとき $\theta \mapsto \theta + \pi$ になる．$r = 2$ のとき，$\theta \mapsto \theta + \pi - \dfrac{3}{2}(r-1)\pi = \theta - \dfrac{\pi}{2}$ になる．そうすると内側の $r = 1$ の方では，偏角 θ は変換後に増えていく．で，それに対して外側 $r = 2$ のときは $\theta \mapsto \theta - \dfrac{\pi}{2}$ で逆向きに回る．だから境界のねじれ条件を満たしている．ここで $f(r, \theta) = (r, \theta)$ とすると何が起こらなきゃいけないかというと，偏角が等しいだけじゃなくて，r という動径方向の値が等しくなきゃいけない．だけど $r = f(r)$ となるのは境界しかないようにしている．$r = 1, 2$ のところでは $f(r) = r$ だけど $1 < r < 2$ のところではそうならない．したがって，第 1 変数を比べることによって不動点がないと分かる．ねじれ条件は満たしているけど，面積保存ではなく[*5]，不動点はない．

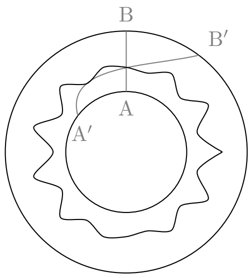
■単調ツイスト条件　きちんと証明するのはそんなに大変じゃないんですけど，ちょっと必要なことがある．そこで，簡単な場合を考えます．どういうことかと言いますと，最初に任意の動径方向の線分というのを引いて，AB とする．A は内側の境界に入っていて，B は外側の境界にいる．ここでもう 1 つ「AB に沿って φ の像の偏角は単調に増加するか減少する」という条件を課した場合を考える．$\varphi(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ で $\varphi(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$ とする．

[*5] 回転方向には長さを保ち，動径方向には引き延ばすような動きをするので，直感的には面積保存しないことが分かると思います．ちゃんと示すなら，Jacobi 行列式を計算して 1 でない値を取ることをいいます．



■証明　もう少し精密なことは後でお話しますが，偏角一定のものを φ で動かしたときに，像がずっと変わっていくわけです．線分 AB の上で点が動いていくと，φ によって新しい曲線を決める．そのとき内側は反時計回りに回って，外側は逆向きに移る．そして新しい曲線の偏角は単調に減ってる．そうすると，元の線分とその φ による像は必ず交点を持ちます[*6]．AB と $\varphi(\mathrm{AB})$ の交点を取り，交点は intersection なので I と書く．1 箇所でしか交わってない簡単な場合を考えてもらって結構です．一番最初にぶつかったところと思っていただいてもいい．

ここから，この AB って線分を回すんです．そうすると動径方向の線分が動いていくにつれ，φ による像も動き，AB と $\varphi(\mathrm{AB})$ の交点 I の軌跡を考えられる．それを γ とする．この I が，A の中になんか軌跡を描く．そうすると，これ閉じてるんです．

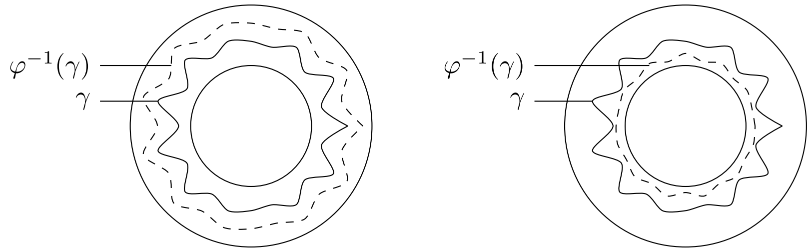


I はどういう点だったのかと考える．$\varphi(\mathrm{AB})$ は AB の像です．だから I を考えたとき，I を移ってくる φ で戻したものがどこにあるのかというと，やはり線分 AB の上にいるわけです．I は像 $\varphi(\mathrm{AB})$ の上にいるので，戻した物についても $\varphi^{-1}(\mathrm{I}) \in \mathrm{AB}$ となる．γ の φ^{-1} による像を $\varphi^{-1}(\gamma)$ と書くと，それは任意の動径とただ 1 点で交わる，閉じた曲線になる．

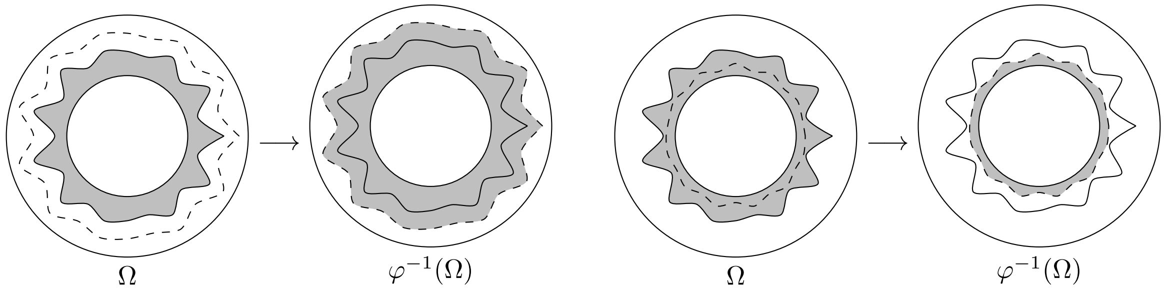
言いたいのは，この γ と $\varphi^{-1}(\gamma)$ にもし何か P という交点があれば，P は φ で止まっているということ．γ と $\varphi^{-1}(\gamma)$ がどこかで交わって交点があったとする．この交点の φ^{-1} による像は動径上にあるから，方向を変えないんです．

というわけで，ポイントは $\gamma \cap \varphi^{-1}(\gamma)$ が空集合でないということ．これが大事．もし交わらなかっとしたら何が起こるのかと考える．φ が連続だから，γ という線はぐるっと 1 周していて，A という領域を 2 つに分けます．A から部分集合 γ を除いた $A \setminus \gamma$ は，内側の境界と γ の間，あとは外側の境界と γ の間，2 つに分かれる．$\varphi^{-1}(\gamma)$ は γ と交わらないんだから，$\gamma \cap \varphi^{-1}(\gamma) = \emptyset$．ということは，$\varphi^{-1}(\gamma)$ は γ と外側の境界の間のところにいるか，あるいは γ と内側の境界の間に入っているか．それしかない．

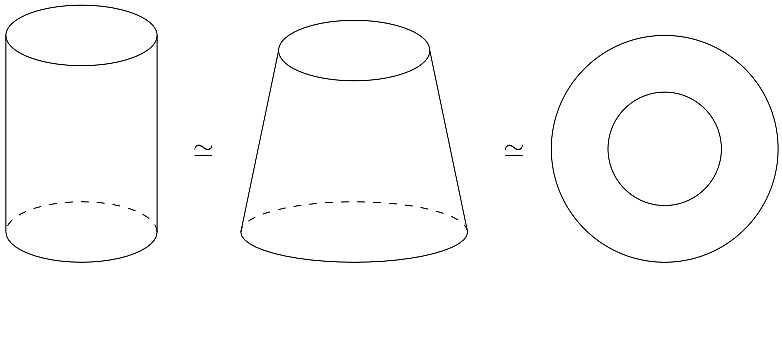
[*6] 中間値の定理によります．



ここまで使ってなかったのは面積保存条件．これで結論が出てくるんです．γ と内側の境界で囲まれる領域を考えます．これがさっきの Ω とする．そうすると $\varphi(\varphi^{-1}(\Omega)) = \Omega$ になりますから，面積保存があると，この $\varphi^{-1}(\Omega)$ の面積と Ω の面積は同じ．一方で Ω を φ^{-1} で移すと，内側の境界が内側の境界に行っているので，γ が膨らむと，内側の境界と γ で囲まれた部分の面積が点線 $\varphi^{-1}(\gamma)$ で囲まれたところの領域に移る．すると元々の領域より大きくなってしまう．あるいは，$\varphi^{-1}(\gamma)$ が中に入ってしまうのなら，この $\varphi^{-1}(\gamma)$ と内側の境界とで囲まれた領域は γ と内側の境界で囲まれた領域にすっぽり入っちゃってますから，面積は減っちゃう．だから面積が等しいということはありえない．そうすると面積保存の条件が成り立たないので矛盾がでてきて，γ と $\varphi^{-1}(\gamma)$ は交わらなきゃいけなくて，交わると交点が出てくる[*7]．



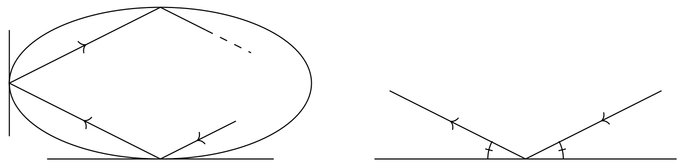
■円環領域の現れる場所　こういうものの一つの例がどういうところに見えるかというと，先ほどから何度か出てきている円環領域．さっき言ってくれたように $\mathrm{Geod}(\mathbb{R}^2)$ はですね，$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$，有向直線全体はこういう形で書けます．図形としてはですね，円環は平面に描かれているんですけど，面積保存写像を使えば高さを制限した円柱とも実は同じなんです．距離とかそういうのがない，面積しかない世界だと，平面の上の円環領域と円柱というのは同一視できる．



[*7] ここまでで示せたのは，交点が少なくとも 1 個存在するということだけです．$\Omega \neq \varphi^{-1}(\Omega)$ の場合は，面積保存を使うと，Ω が $\varphi^{-1}(\Omega)$ の外側にはみ出る部分と $\varphi^{-1}(\Omega)$ が Ω の外側にはみ出る部分の両方が存在すると分かります．そのため中心からの距離に関して中間値の定理を使うと，2 つ目の交点が得られます．もちろん，$\Omega = \varphi^{-1}(\Omega)$ なら交点は無数に存在するので，「少なくとも 2 個存在」という命題は明らかに成り立ちます．

4.2 ビリヤード写像

それでですね，次に始点と終点が一致する滑らかで凸な閉曲線を γ として，平面の上に凸な曲線で γ で囲まれた中の領域を考えます．実際に現実に行われているものとは違うけれども，平面上の凸領域でビリヤードをする．そういえば，ビリヤードが好きな先生がいらっしゃると聞いていますけども……？



どういうことをいっているかというと，たとえば真っ直ぐ球がやってきます．そしたらぶつかる境界の点で接線を引いて，入射角と反射角が等しいようにして跳ね返る[*8]．今度は，次に境界とぶつかる点で接線を引いて，同じように次々反射する．こういうことを考える．そして最初の点が P_0，境界にぶつかる点を順に $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots$ と，こういうようなことをする．P_0 が P_1 に行って，P_1 が P_2 に行って，$\ldots$ という風に，次にぶつかる点を対応させる写像をビリヤード写像という．

ただし，ぶつかる場所のパラメータは何かというと，点だけじゃなくて角度もあります．まず曲線の上の弧長パラメータ．長さでパラメータ付けをする．あと入ってくる角度．というわけで考えているものは，曲線 γ 上の点と入射角の 2 つがある．

このビリヤード写像

$$(\text{曲線 } \gamma \text{ 上の点}, \text{入射角}) \mapsto (\text{別の点}, \text{入射角})$$

をどこで考えればいいかというと，$\mathbb{S}^1 \times [-1,1]$ というのが，いまビリヤード問題を考えているときの空間，すなわち境界での反射に相当するデータです．まず曲線の長さで γ にパラメータを付けておくと，曲線が円周と $1:1$ 対応します．円周の長さは 2π ですけど，拡大縮小で 1 にできますから，これは $\mathbb{S}^1$ と思って良い．もう一つは角度なんですけど，今の場合 φ がどの範囲にいるかというと $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ です．$\cos\varphi$ は $\varphi = 0$ で $\cos 0 = 1$，$\varphi = \pi$ で $\cos\pi = -1$ であり，単調減少です．よって $[-1,1]$ に値を取る．$\cos\varphi$ をそのまま用いてもいいんですけど，マイナスをつけて，φ が 0 から π にいくときにパラメータが -1 から 1 に動くようにする．ここに出てくるパラメータとして $-\cos\varphi$ を取れる．

そうすると，ビリヤード写像というのは $\mathbb{S}^1 \times [-1,1]$ から $\mathbb{S}^1 \times [-1,1]$ への写像:

$$\mathrm{Geod}^+(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^1 \times [-1,1] \circlearrowleft \Phi.$$

ここで，$\mathbb{S}^1 \times [-1,1]$ で考えてパラメータ付けしたんですけど，こいつらは $\mathrm{Geod}^+(\mathbb{R}^2)$ と相性がよい．$\mathbb{S}^1 \times [-1,1]$ の点を決めると，ぶつかる点とどの方向から入ってくるかという情報で向きの付いた直線が決まる．直線が決まっているとすると，$\mathrm{Geod}^+(\mathbb{R}^2)$ の話になっています．だからこの話で，Φ は $\mathrm{Geod}^+(\mathbb{R}^2)$ に作用している．

ただし，よく考えれば分かると思うんですけど，Φ はねじれ条件そのものを満たしているわけではない．この写像は $\varphi = 0$ だと点が全然動かない．$\varphi = \pi$ でも点が動かない．境界を止めちゃってるからさっきのとは

[*8] 普通は入射角・反射角というとき法線方向からの角度を測りますが，後でパラメータ付けるときの都合で，ここでは接線側から測った角度を入射角と呼んでいます．

違う．Φ はある意味でねじれ条件のようなものを満たすのだけど，修正が要る[*9]．面積保存の方は，実は成り立っている．

次のような問題を考える．ビリヤードがぶつかってぶつかって，いつか n 回ぶつかって戻ってくることはありますか．こういう軌道はありますかありませんかというのは，Φ を n 回やった写像 Φ^n に不動点がありますかということ．ねじれ条件のあたりを上手く修正しなきゃいけないんですけど，さっきの Poincaré の最後の幾何的定理を用いると，実はこういうビリヤード写像に対して周期解の存在が従うことが分かる．

5 高次元球面の体積

時間が無いので，予告していた高次元球面の体積の話をちょっとだけ．向き付けられた直線全体 $\mathrm{Geod}^+(\mathbb{R}^2)$ を考える．それから平面全体 $\mathbb{R}^2$ を持ってくる．そうすると，直積集合の上で

$$\{(x,\ell)\in\mathbb{R}^2\times\mathrm{Geod}^+(\mathbb{R}^2)\ \mid x\in\ell\}$$

という集合を考えることができる．点と直線の組を考えて，点が直線の上に乗っているものを考える．点と直線を全く別に考えたとすると，点は平面全体を動くし，直線は直線全体を動きます．その中で，点が直線の方程式を満たすような組，点が直線の上にあるものを取る．直線に対しては直線の方程式というものがあります．直線 ℓ を方程式で書いたときに，x がその上に乗っかっているというのは，ℓ の 1 次方程式を満たしなさいといっている．方程式みたいなものとその解を組にしている．

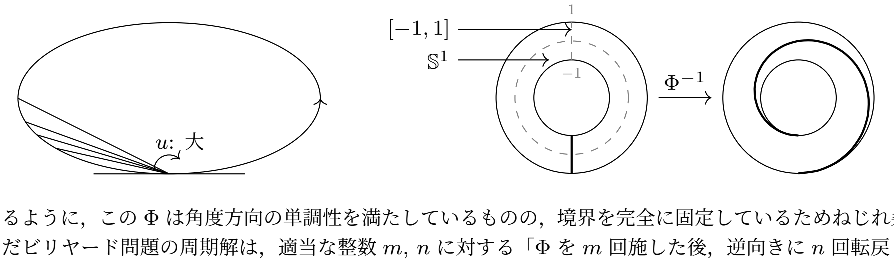
これ重要な考え方なんですけど，それをそれぞれの成分に射影する．つまり (x,ℓ) に対して，一方では点 x を考えるし，他方では直線 ℓ を考える．こんなことをする．

$$\begin{tikzcd}
& \{(x,\ell)\in\mathbb{R}^2\times\mathrm{Geod}^+(\mathbb{R}^2)\ \mid x\in\ell\} \arrow[dl, "(x,\ell)\mapsto x"'] \arrow[dr, "(x,\ell)\mapsto \ell"] & \\
\mathbb{R}^2 & & \mathrm{Geod}^+(\mathbb{R}^2)
\end{tikzcd}$$

同じようなことを球面でやってみる．n 次元球面 $\mathbb{S}^n$ というのがあるんですけれども，それは方程式で書けば $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ という実数の組でこれらの 2 乗和が 1 となるもの．

$$\mathbb{S}^n=\{(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x_0^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\}$$

[*9] 閉凸曲線 γ に反時計回りのパラメータを入れ，接線方向から測った入射角 φ を変化させたときの Φ^{-1} の振る舞いを調べてみます．角度 φ が 0 から π に動くにつれ，反射データの空間を $\mathbb{S}^1\times[-1,1]$ と同一視するときの $[-1,1]$ 側のパラメータ $-\cos\varphi$ が -1 から 1 まで動きます．また，これに対応して 1 つ前の反射点が反時計回りに γ をぐるっと 1 周します．このため，動径方向の線分を Φ^{-1} で移すと，次のような図の対応が得られます．

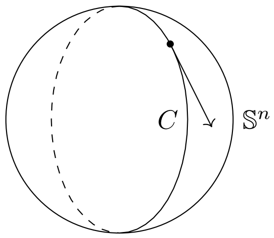


見て分かるように，この Φ は角度方向の単調性を満たしているものの，境界を完全に固定しているためねじれ条件を満たしていません．ただビリヤード問題の周期解は，適当な整数 m, n に対する「Φ を m 回施した後，逆向きに n 回転戻した写像」の固定点に他なりません．このように補正した写像の方では，単調ツイスト条件が満たされます．したがって Poincarè の最後の幾何的定理により，周期解の存在が保証されます．

こういうものと向き付けられた大円の集まり $\mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^n)$ を考える．さっきの直積の中に

$$\{(\mathrm{P}, C) \in \mathbb{S}^n \times \mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^n) \mid \mathrm{P} \in C\}$$

という集合がある．球面上の点に対し，そこを通る向き付けられた大円を描きたい．これを決めるのは何かというというと，速度ベクトル．点と速度ベクトルを与えれば大円が決まる．大円があったらそこの上の点のどこでも今の操作ができる．



さっきの集合が何かというと，「球面上の点と方向を規定しなさい」といっている．そうするとこの集合は，球面の接ベクトル全体を集めてきた空間 $T\mathbb{S}^n$ から大円の接空間を張るようにその中で長さが 1 のものを集めて得られる集合と同一視できる．

$$\{(P, C) \in \mathbb{S}^n \times \mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^n) \mid P \in C\} \simeq U(T^*\mathbb{S}^n)$$

ある理由があって $*$ を付けて $T^*\mathbb{S}^n$ としているんですが，この集合を上手く言えないので，だから話すのをちょっとやめたんです．この下に $\mathbb{S}^n$ があって，$U(T^*\mathbb{S}^n)$ には $\mathbb{S}^{n-1}$ をファイバーとするファイバー束の構造がある．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \longrightarrow & U(T^*\mathbb{S}^n) \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{S}^n \end{array}$$

Möbius の帯って聞いたことあると思うんですけど，あれと似ています．局所的には直積だけど，全体で見たら直積になってなくて捩れている．これもそういうもので，局所的には n 次元球面 $\mathbb{S}^n$ の一部と $n-1$ 次元球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ が直積になっているのだけど，大域的には捩れている，そういう構造がある．これを使うと $\mathbb{S}^{n-1}$ の体積と $\mathbb{S}^n$ の体積をかけて，$U(T^*\mathbb{S}^n)$ の体積が分かるから，$U(T^*\mathbb{S}^n)$ と $\mathbb{S}^{n-1}$ の体積で $\mathbb{S}^n$ の体積が書ける．

もう 1 つは，

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{1} & \longrightarrow & U(T^*\mathbb{S}^n) \\ & & \downarrow \\ & & \mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^n) \end{array}$$

というファイバー束がある．これはさっき出てきた．大体単位円みたいなのが乗ってるんだけど，直積じゃなくて捩れてる．ここでも $\mathbb{S}^1$ と $\mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^n)$ の体積をかけると $U(T^*\mathbb{S}^n)$ の体積になる．

言い様がないんだけど，あともう 1 つだけ別の大事なものが必要です．奇数次元の $\mathbb{S}^{2m+1}$ ですと裏に複素射影空間 $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ というのがあります．ここは計算しないで体積が求められる世界なんです．その背景に一つあるのが，交差とかそういうものを使って体積が書けるということ．なんとなく，タチがいいというのがあ

る．そういったことがあって，$\mathbb{S}^1$ と $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ の体積が分かる．$\mathbb{S}^1$ と $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ が計算できるから，$\mathbb{S}^{2m+1}$ も計算できる．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^{2m+1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \end{array}$$

これらの話をつなげるというようなことをすると，偶数次元も入れて全部，球面の体積を計算できる．話せると思ったんだけど，だんだんだんだん無理かなと思いました．話さないでおいて，後でレジュメを送りますので，興味がある方はそれを見てください*10．どうもありがとうございました．

*10 小野先生からいただいたレジュメの内容について，議論をフォローしきれなかったのですが，セミナー後に色々教えていただいた内容を踏まえ，可能な範囲で概略をかいつまんでご紹介します．

第 0 段（既知のこと）$n = 1$ のとき，単位円周 $\mathbb{S}^1$ の長さが 2π であることは既知とします．また本セミナーの中で，$n = 2$ のときの単位球面 $\mathbb{S}^2$ の面積が 4π であることも示しました．

ちなみに，セミナー中で紹介された単位球面 $\mathbb{S}^2$ の面積の計算は，トーリック多様体のモーメント写像による像の体積になっており，トーリック多様体の体積が求まることの特別な場合です．

第 1 段（奇数次元の場合）複素射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$ を割る前の $\mathbb{C}^{n+1}$ を $\mathbb{R}^{2n+2}$ と同一視すると，単位球面への制限で全射 $\mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ が得られます．そして割る方の $\mathbb{C}^\times$ から絶対値 1 の複素数を集めると単位円周 $\mathbb{S}^1$ になっているので，$\mathbb{S}^{2n+1}$ は $\mathbb{S}^1$ をファイバーとする $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上のファイバー束になり，奇数次元の球面 $\mathbb{S}^{2n+1}$ の体積が $\mathbb{S}^1$ の体積と $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の体積の積になると分かります．

あとは $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の体積が求まれば良いわけですが，ここで $\mathbb{S}^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ という同一視をして，$(\mathbb{S}^2)^n = \left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right)^n$ から $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ への $n! : 1$ 写像（分岐被覆）を作ります（k 番目の $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の斉次座標を $[z_k : w_k]$ として，$\frac{z_k}{w_k}$ たちの基本対称式の比で分母を払うと得られます）．ここで，体積が Kähler 形式の冪の積分で表せることを使うと，交叉あるいはコホモロジーの積の計算で体積が求められます．$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の体積が $(\mathbb{S}^2)^n$ の体積の $\frac{1}{n!}$ 倍となることが分かります．

第 2 段（偶数次元の場合）同一視 $U(T^*\mathbb{S}^{2n}) = \{(x, \ell) \in \mathbb{S}^{2n} \times \mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^{2n}) \mid x \in \ell\}$ を考え，直積の第 1，第 2 成分への射影をそれぞれ $U(T^*\mathbb{S}^{2n})$ に制限することを考えます．この集合は「$\mathbb{S}^{2n}$ の点と，その点を通る $\mathbb{S}^{2n}$ の向き付けられた大円上の単位接ベクトルの対」です．よって $\mathbb{S}^{2n}$ の点を止めたときのファイバーは点における単位接ベクトル全体の集合と同一視されるから，$\mathbb{S}^{2n-1}$ をファイバーに持つファイバー束 $U(T^*\mathbb{S}^{2n}) \to \mathbb{S}^{2n}$ が得られます．また大円の方を止めるとファイバーは $\mathbb{S}^1$ になるので，$\mathbb{S}^1$ をファイバーとするファイバー束 $U(T^*\mathbb{S}^{2n}) \to \mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^{2n})$ が得られます．どちらについても底空間の体積とファイバーの体積の積が全空間の体積の積になるので，$\mathbb{S}^{2n}$ の体積が $\mathbb{S}^1$，奇数次元球面 $\mathbb{S}^{2n-1}$ の体積と $\mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^{2n})$ の体積で計算できることになります．

最後に現れた $\mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^{2n})$ の体積は，次のように計算できます．以下は偶数次元に限らず一般の次元で成り立つ議論なので，$\mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^m)$ の体積を考えます．$\mathbb{S}^m$ を $\mathbb{R}^{m+1}$ に埋め込んで考えると，$\mathbb{S}^m$ 上の点 $\boldsymbol{x}$ における $\mathbb{S}^m$ の接ベクトルは，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{m+1}$ と同一視されます．かくして

$$\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1, \|\boldsymbol{v}\| = 1, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v} = 0\} \to \mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^m)$$

という全射が得られます．さらに $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_m)$，$\boldsymbol{v} = (v_0, \ldots, v_m)$ のように座標を入れ，$z_k := x_k + iv_k$ とおくと，$\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1}$ は $\mathbb{C}^{m+1}$ と同一視され，しかも $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{v}$ に関する条件が $z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$ と表されるので，各点のファイバーが $\mathbb{C}^\times$ となります．$\mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^m)$ が $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ の複素 2 次超曲面となり，そのホモロジー類は $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ のホモロジー類の 2 倍となるので，Kähler 形式の冪を用いて $\mathrm{Geod}^+(\mathbb{S}^m)$ の体積を計算すると $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の体積の 2 倍となることが判ります．

$\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ の体積というとき，Kähler 形式のコホモロジー類を決めないといけませんが，それは $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ の体積（面積）から決まります．