

平面幾何の基本図形は三角形と円、ここでは三角形についての確認。

61.1 直線 l 上に2点 A, B がある。比 $m:n$ が与えられたとする。このとき、直線 l 上に「 $AP:PB=m:n$ をみたす点 P 」は、 $m \neq n$ であれば、必ず2つある：線分 AB 上の点 P_1 と、そうでない点 P_2 と。 P_1 を「 AB を $m:n$ に内分する点」、 P_2 を「 AB を $m:n$ に外分する点」という。

$m=n$ のときは、内分点は AB の中点。そして外分点はない。

61.2 三角形について、次の定理を確認する。

1) $\triangle ABC$ の辺 BC 上に点 P があるとき、

AP が内角 A の二等分線である $\Leftrightarrow BP:PC=AB:AC$ 。

2) $\triangle ABC$ の辺 BC の延長上に点 P があるとき、

AP が外角 A の二等分線である $\Leftrightarrow BP:PC=AB:AC$ 。

3) 【チェバの定理(逆もこめ)】 $\triangle ABC$ があり、直線 BC, CA, AB 上に点

P, Q, R がある。3点のうち偶数個が、 $\triangle ABC$ の辺の外にあるとき、

3直線 AP, BQ, CR が1点で交わる $\Leftrightarrow \frac{PC}{BP} \cdot \frac{QA}{CQ} \cdot \frac{RB}{AR} = 1$ 。

4) 【メネラウスの定理(逆もこめ)】 $\triangle ABC$ があり、直線 BC, CA, AB 上に点

P, Q, R がある。3点のうち奇数個が、 $\triangle ABC$ の辺の外にあるとき、

3点 P, Q, R が1直線上にある $\Leftrightarrow \frac{PC}{BP} \cdot \frac{QA}{CQ} \cdot \frac{RB}{AR} = 1$ 。

5) $\triangle ABC$ の辺 AB 上に点 D 、辺 AC 上に点 E があるとき、面積比として

$\triangle ADE : \triangle ABC = AD \cdot AE : AB \cdot AC$ 。

6) $\triangle ABC$ について、「小さい内角の対辺は小さい。」すなわち

$\angle B < \angle C \Leftrightarrow AC < AB$ 。

7) 【三角不等式】 $\triangle ABC$ について、

$AB < AC + CB, AB > |AC - BC|$ 。

61.3 三角形の五心について、以下、 $\triangle ABC$ を考える。以下のことが、要証明。

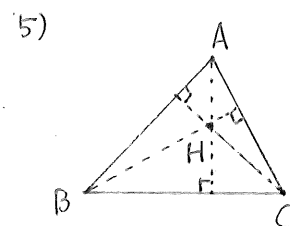
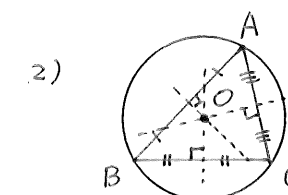
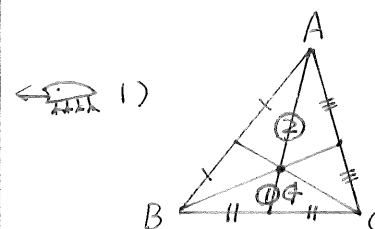
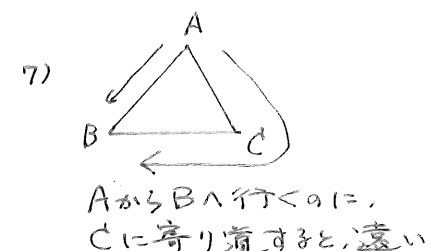
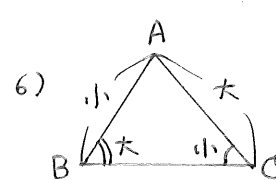
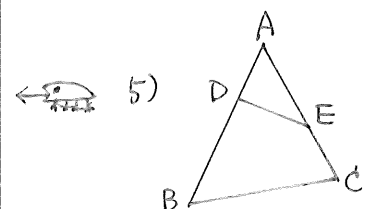
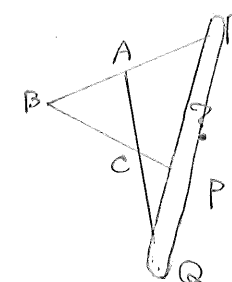
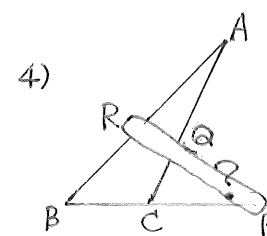
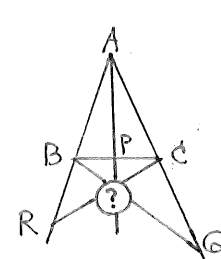
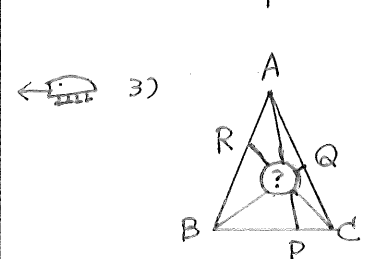
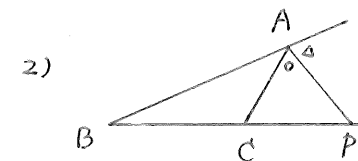
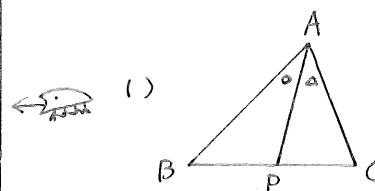
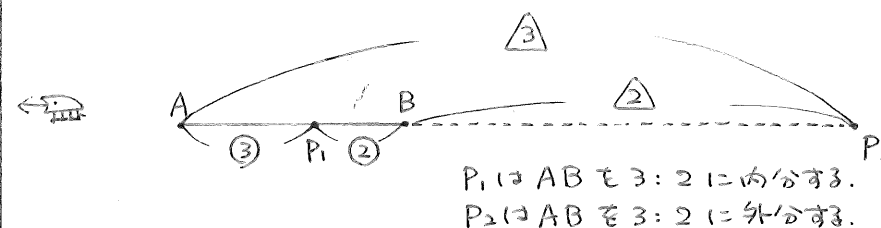
1) 頂点と、その対辺の中点を結んだ線分を中線という。3本の中線は1点 G で交わる。この G を重心という。 G は中線を $2:1$ に内分する。(頂点 A から対辺の中点 L への中線では、 $AG:GL=2:1$ 。)

2) 各辺の垂直二等分線は1点 O で交わる。この O を外心という。外心は外接円の中心である。

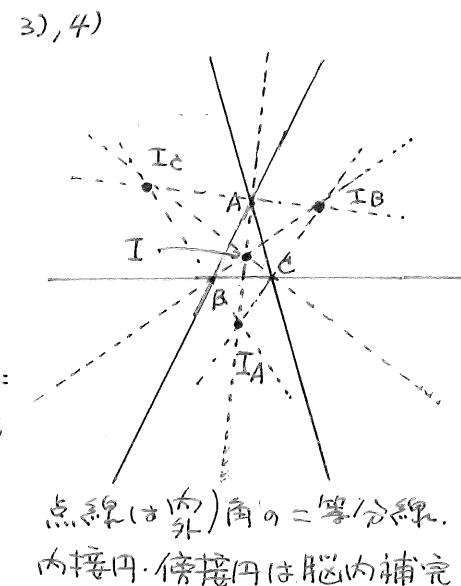
3) 各内角の二等分線は1点 I で交わる。この I を内心という。内心は内接円の中心である。

4) 内角 A と外角 B と外角 C の二等分線は1点 I_A で交わる。この I_A を傍心という。傍心は I_A, I_B, I_C と3つある。傍心は傍接円の中心である。(ただし、1辺と、2辺の延長とに接する円を、傍接円という。)

5) 各頂点から対辺へ下ろした垂線は1点 H で交わる。この H を垂心という。 H はその延長



G, I は必ず $\triangle ABC$ の内部にあり、 I_A, I_B, I_C は $\triangle ABC$ の外部にある。
 O, H は $\triangle ABC$ の内部にあることも外部にあることも周上にあることもある。



円についての基礎事項の確認.

62.1 初等幾何学での円のとりあつかいは、円周角定理(逆も含めて)がまず重要.

【円周角定理(逆も含めて)】 4点A, B, C, Dがあるとき,

ア) 直線ABに関して2点C, Dが同じ側にあるならば,

4点が同一円周上にある $\Leftrightarrow \angle ACB = \angle ADB$.

イ) 直線ABに関して2点C, Dが反対側にあるならば,

4点が同一円周上にある $\Leftrightarrow \angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$.

イ) は, "円に内接する四角形" についての定理として言及されることも多い.

62.2 円周角定理から得られる, 有用な定理. 特に方べきの定理(逆も含めて)は強力.

1) 【接弦定理】 円上に2点A, Tがあり, 円のTでの接線上に点Bがあるとする. 弧AT(2つある)のうち, 直線ATに関してBと同じ側にあるものの上に立つ円周角は, $\angle ATB$ と等しい.

2) 【方べきの定理(逆も含めて)】 2直線AB, CDが点Pで交わり, かつ,

甲) Pは線分AB上, および, 線分CD上にある.

乙) Pは線分ABの延長上, および, 線分CDの延長上にある.

のどちらかが成り立っているとすると, このとき,

4点A, B, C, Dが同一円周上にある $\Leftrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

2)' 【方べきの定理・接線 ver. (逆も含めて)】 直線AB上, 線分ABの延長上に点Pがあり, また, 直線AB上でないところに点Cがあるとする. このとき,

直線PCが $\triangle ABC$ の外接円の接線である $\Leftrightarrow PA \cdot PB = PC^2$.

62.3 円の接線, 円と直線の位置関係について, 復習.

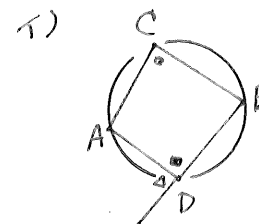
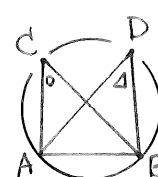
● 中心Oの円 Γ と, Γ 上の点Aを通る直線 l について, 「 l が Γ の(Aでの)接線である」とは, 「 $l \perp OA$ 」であることだ, と定義する. このとき, 点Aのことを(Γ と l の)接点という.

● 中心Oの円 Γ の外部の点Pを通る Γ の接線は2本ある. その接点をA, Bとすると, $PA = PB = \sqrt{OP^2 - r^2}$ (r は Γ の半径)が成り立つ. この等式の値を, Pから Γ へいた接線の長さという.

62.4 2円の位置関係. 中心 O_i , 半径 r_i の円 Γ_i があり($i=1, 2$), 線分 O_1O_2 の長さが d だとする. 語の簡単のため, $r_1 \neq r_2$ とすると;

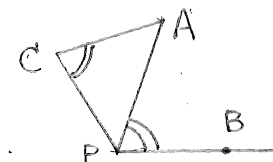
$r_1 + r_2 < d$	2円は離れている	0個	2本	2本
$r_1 + r_2 = d$	2円は外接する	1個	2本	1本
$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	2円は交わる	2個	2本	0本
$d = r_1 - r_2 $	2円は内接する	1個	1本	0本
$d < r_1 - r_2 $	2円は一方が他方を含む	0個	0本	0本
		共有点	共通外接線	共通内接線

← ア)



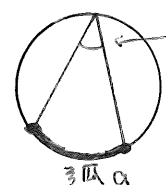
イ) では, 四角形ACBDの「内角C, 内角D」ではなく, 「内角Cと外角D」に注目して言及されることもある.

次の定理を【接弦定理の逆】ということがある:



$\triangle APC$ があり, 直線APに関してCと反対側に点Bがある. このとき, $\angle ACP = \angle APB$ であれば, Pは $\triangle APC$ の外接円の接線である.

← 弧の上に立つ円周角"は古風な表現.



これが
"弧 α の上に立つ円周角".



点線部分を「線分ABの延長」というので, 左へ「直線AB上,」は不要でした. 書いてあったのでそのまま...

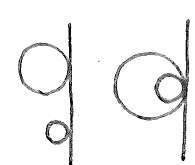
← 中心Oの円 Γ の半径を r とし, Oと直線 m の距離(すなわち, m 上に点Hを $OH \perp m$ となるようにとったときの, 線分OHの長さ)を d とする. このとき,

$$\begin{cases} r > d \Leftrightarrow \Gamma \text{ と } m \text{ は交わる (2点を共有する),} \\ r = d \Leftrightarrow \Gamma \text{ と } m \text{ は接する (1点を共有する),} \\ r < d \Leftrightarrow \Gamma \text{ と } m \text{ は離れている (共有点なし)} \end{cases}$$

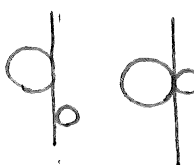
が成立する. なぜか, 数学Aの教科書には載っていない.

← 共通外接線... 2円が接線に関して同じ側にあるとき.
共通内接線... 2円が接線に関して反対側にあるとき.

外



内



接点は, 接線のどちら側にも属していないのだが, まあ, 1点くらいそういう点があるても, 円が「こっち側にある」といってしまう.

「作図」の数学での正しい意味、正しい取り扱いの基本を学ぶ.

63.1 本来、数学で「作図」といふとき、許される作業は次のことに限られる.

[1] 平面上に2点が与えられたとき、その2点を通る直線を作る.

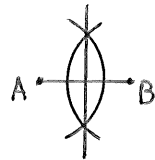
(この作業を、「定規」ができること、と称する.)

[2] 平面上に2点 O, A が与えられたとき、 O を中心とし A を通る円を作る.

(この作業を、「コンパス」ができること、と称する.)

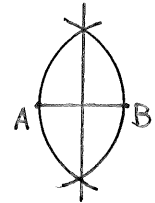
例 線分 AB の垂直二等分線の作図.

作図(1)



教科書では許されているが、本来はインチキ。「点 A 、点 B を中心として、等しい半径の円をかき」ことが、[1][2] から直接にはできない.

作図(2)



正三角形の作図はできる. 2つの円が[2]だけによりすぐかけることに注意すると、垂直二等分線も作図できる.

※ただし、議論の積み重ねによって、作図(1)を正当化することは可能.

63.2 上記[1][2]の「作図の公法」を遵守するとともに、本来は

● その作図手順が実行可能であることを保証する.

(たとえば「このように2円をかくと、必ず2つ交点を持つ」理由を述べる等.)

● でき上がった作図結果が要求通りであることを証明する.

ことが必要である. が、中学・高校の教育の現場では必ずしもいわれない.

63.3 中学校で学んだものに加え、いくつか作図を知ろう.

例1 円外の1点から接線を作図する.

1) 円の中心 O と1点 P の中点 M を作図する.

2) 中心が M で O を通る円をかき.

3) 2円の交点が、求める接線の接点となる.

例2 直線外の1点を通り直線に平行な直線を作図する.

1) 中心が A で P を通る円をかき、しとの交点を B とする.

2) AB が作図できるはず. 直線 PQ が AB と平行.

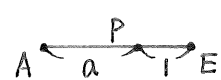
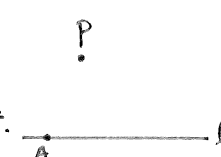
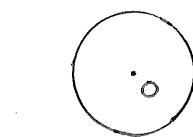
※この作図から、いつでも、線分を整数比に内分・外分できる.

例3 長さ 1 と長さ a が与えられているときの、長さ $\sqrt{a}$ の作図.

1) 1直線上に3点 A, P, E をこの順に、 $AP = a$, $AE = 1$ となるようにとる(とれているとする).

2) AE を直径とする円 Γ と、 P を通り AE に垂直な直線との交点(2つあるが、どちらでもよい)を Q とする.

3) $PQ = \sqrt{a}$ である.



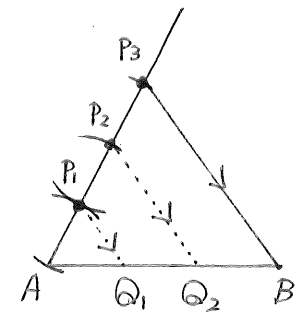
← 平面は、どこまでも広がっているものとする.

直線は、どこまでも伸びているものとする.

← 教科書には「与えられた点を中心として与えられた半径の円をかき」とあるが、誤りである. 「半径」には、中心と円周上のある点を結んだ「線分」を表すことと、その線分の「長さ」を表すことがあるが、前者だとすると左ページ例の作図(1)は意味をなさないし、後者だとすると、長さは数(正の実数)であり、それは本来、初等幾何の範囲外の対象であって、語ることに本来が無意味である.

← 「コンパスは、一たび紙から離れると、半径(の長さ)を記憶できない、なびと表現することもある. 平面幾何での作業や思考は、あくまで平面内に納まっていかねばならない(理論の積み重ねによってあとかん平面外の世界も考えられるようになるが、それはまだまだ手間をかけた先の話). 1つの円をかきあげたコンパスが、紙から持ち上げられても、半径(の長さ)が保存されて、再び紙に着地して同じ半径の円がかけるとは、[2]は、言っていない.

← このような面倒なことを言うのは、伊達や西牟田ではないし、ましてや「これが1レール」とか「数学のドグマ」だとかそういう低俗な言葉でもない. ユークリッド以来、平面とは何か、点とは、直線とは、そして「平面の性質とは何か」を数学者が真剣に考えてきた結果、いろいろ洗練されてこうなる.



たとえば、線分 AB を3等分するには:

1) A を始点とする半直線上に3点 P_1, P_2, P_3 をこの順に、 $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3$ となるようにとる(これは「コンパス」でできる).

2) P_3B と平行で P_1, P_2 をそれぞれ通る2本の直線を作図し(例2), それと AB との交点をそれぞれ Q_1, Q_2 とする.

3) Q_1, Q_2 が AB を3等分している.

第64講 空間図形.

A-2-4-全体

3次元空間とそこに存在する図形について、この先必要な基礎知識を確認する。

64.1 (3次元)空間内に相異なる2直線があるとき、その位置関係は

① 交わる ② 平行である ③ ねじれの位置にある
の3通りである。2直線のなす角は、①ではそのまま定め、②では 0° (または 180°)とし、③では直線を平行移動して①の状態に直して定める。

64.2 平面をただ1つに定める条件として、次のようなものがある。

① 一直線上にない3点 ② 1つの直線とその上にない1点
③ 交わる2直線 ④ 平行な2直線
①があるので、3点A, B, Cを通る平面を「平面ABC」と呼ぶ。

64.3 空間内に相異なる2平面があるとき、その位置関係は

① 交わる ② 平行である
の2通りである。①のとき、2平面の共有点は1つの直線(交線という)を形成する。
2平面のなす角の定め方は、次の2通りがある。どちらも大切。



64.4 空間内に直線と平面があるとき、その位置関係は

① 交わる ② 平行である ③ 直線が平面上にある (on the plane)
の3通りである。だから、直線と平面の共有点の個数は、1個、0個、無限個のいずれかであり、ほかの可能性はない。

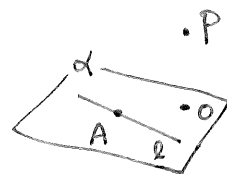
64.5 <定義> 直線 l が平面 α に垂直である (または、 l は α と直交する) とは、 α 上に
あるすべての直線と l とが垂直であることである。

[定理] 直線 l と平面 α に対して、

$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \exists m, \exists n, m, n \text{ は } \alpha \text{ 上の交わる2直線} \wedge m \perp l \wedge n \perp l.$$

64.6 [定理 (三垂線の定理)] 図の状況で、

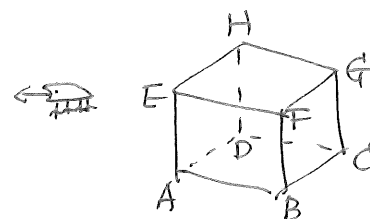
- (1) $PO \perp \alpha \wedge OA \perp l \Rightarrow PA \perp l$.
(2) $PO \perp \alpha \wedge PA \perp l \Rightarrow OA \perp l$.
(3) $PA \perp l \wedge OA \perp l \wedge PO \perp AO \Rightarrow PO \perp \alpha$.



64.7 多面体、特に正多面体については中学校で学んだ通りだが、高校では
さまざまな計量が必要される。その基本技術は「平面に話を持ち
込む」「三角比を用いる」「座標を導入」「ベクトルを使う」など。

64.8 [定理 (オイラー)] 穴のない、ふくらまずと球になる多面体が頂点を v 個、
辺を e 本、面を f 枚持つとすると、 $v - e + f = 2$ が成り立つ。

証明は、たとえば、 f に関する数学的帰納法(未習)による。

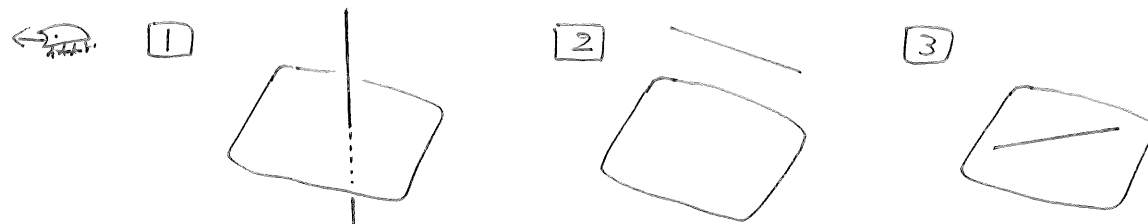


直方体 ABCD-EFGH について、

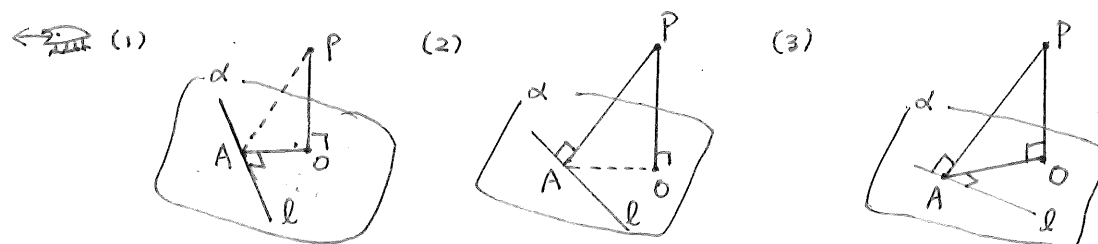
ABと 交わる : AD, AE, BC, BF.
平行 : DC, EF, HG.
ねじれの位置 : DH, CG, EH, FG.



右の方の定義では「平面に対して垂直な直線」が登場しているが、
平面と直線が垂直であることの定義は、64.5 で述べている。先取りし
てしまった。



定義の上では、 $l \perp \alpha$ を定めるには α 上に (無限本) あるすべての直線と
 l との直交を確かめなければならないが、それが、2本だけでいいよ、という定理。



穴がたとえ1つあるとは、ふくらまずと (球) こんなふうになること。
穴が g 個あるときは、 $v - e + f = 2 - 2g$ となる。
現代幾何学にとってこの定理は、大切な源泉の1つである。

第65講 【研究】ユークリッド平面幾何学. 公理論的構成.

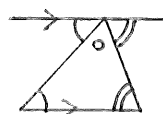
2000年以上, 科学の重要な礎石でありつづける, 『原論』の紹介.

65.1 中学校の教科書に載っていたことを, やや深く, 振り返ってみよう.

「任意の n 角形の内角の和が $(n-2) \times 180^\circ$ である」のはなぜか. それは, n 角形は $(n-2)$ 個の三角形に分割できて, 三角形1つの内角の和は 180° だからだ.

では, 「任意の三角形の内角の和が 180° である」のはなぜか. 当たり前, ですよね. とはいけない. たとえば球面上で考えると, 三角形の内角の和は必ず 180° を超える (ただし球面上では, 赤道や経線のような "大円" を直線と見なす).

そこで, 右の図により説明がされる: 平行線を補助線としてひき, 平行線の錯角は等しいことを根拠とする.



...では, 「平行線の錯角が等しい」のはなぜか. その理由は, 中学校の教科書には明確に述べられていない. そのうえ, 問題は実はそれだけではなく, "直線 l とその上にない点 P が与えられたとき, P を通り l に平行な直線が1つある" のはなぜか, もまた追求されるべき論点なのである. 説明, 証明とは, いつも「 $\odot$ だから $\triangle$ だ」という形式をとる. だから, 「どうして $\odot$ なのか?」と問われることは常に想定していなければならぬ. しかし, 上に見たように, 理由の理由も問い, その理由の理由の理由を問い... と浮世根問はとてまでも続くのであって, これは, 尋常の手段では終わらない.

65.2 紀元前300年ごろ, 『原論』(ストイキア) という書物ができた. 著者としてはユークリッド(エウクレイデス)の名が挙げられている. これは, 当時知られていた幾何学(主に平面上のこと, 空間内のことも一部に含む)の諸知識を, 以下に述べような意味で "論理的" に, "体系的" に, すべてに証明をつけて述べたものである.

1) まず, 基本的な用語や概念を定義し, それらについて基本的な性質を議論の前提として設定する. これらのことがらの理由は問わない.

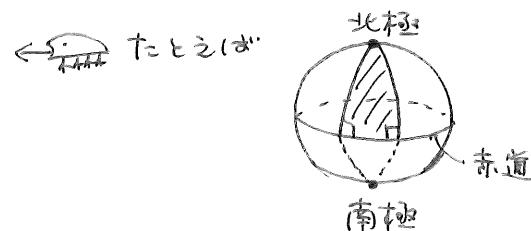
また, "定規" と "コンパス" にできることを規定する.(65.3 公準1°2°3°).

2) 1) に定めたことをもとに, "定規" と "コンパス" を道具として, 1つ1つの定理を順に証明していく. もちろん, 証明できた定理は次から用いてよい.

65.3 『原論』が1) で挙げることがらは「定義」と「公準・公理」に分かれている. どれも「そりゃそうだ」「あたりまえだ」と感じられ, ことばかりである. しかし, その選択はきわめて適切で, 当時得られていた幾何学の結果をすべて示すのに過不足ない基礎礎を与えている.

そしてそれだけではない. 『原論』は, 我々が「平面」だと思っているものがどんなものであるか, 何であるか, を過不足なく語っている. 1) をみたすものが, 平面である. 1) が, 平面を特徴づけている. ここに, 現代数学の根幹思想, 「世界を倉りる」が芽生えている.

65.4 まったく紙面が足りないのぞ, 諸君には『不完全性定理』(野崎昭弘著, ちくま学芸文庫), 『幾何のおもしろさ』(小平邦彦著, 岩波書店), 『幾何入門』(砂田利一著, 岩波書店) を紹介する.



← たとえば

北極と赤道の2点を, 赤道, 子午線2本で結ぶと, 三角形の内角の和は 180° を超えている (さらに, その超過分が, 三角形の面積に比例している. これは実は, 他の三角形に対しても成立する大定理である.)

← 球面上では, 平行線は ひけない! つまり, "大円" を2つかくと, 必ず (2点で) 交わってしまう. これが, 球面上では三角形の内角の和が 180° にならず... 理由 (の表現の1つ) である.

← ユークリッドが実在の人物かどうかはわからず, 『原論』は後数人によるものだ... という説もある. 私は, 『原論』の著者が, 未来人だったり地球外生命体だったとしても驚かない (ウン, それはそれで驚くが, 一方で「なまじり」, 「そりゃこんなすごい本だもんねあ...」と納得もする). ユークリッドには, 現代数学が見えていた... としかいいようがない.

← 第63講を参照せよ.

もちろん, なにぶん昔の本なので, 現代数学の観点からは甘いところもある. (しかし, 大きな問題ではなく, 修正できる.)

← 公準と公理は, 現代数学の立場からは区別の必要があまりないので, まとめて 公理 (axiom) というが, 『原論』では公準は幾何学的内容で公理はそれ以外, という感じ. 公準は5つ, 以下に掲げる. (カン二に)

1° 任意の点から他の点に向けて直線を (ただ1本だけ) ひける.

2° 線分は ∞ までも (n と m ともに) 延長できる.

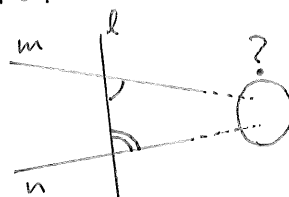
3° 任意の2点 O, A に対し, 中心 O , 半径 OA の円がかけ.

4° すべての直角は互いに等しい.

5° 図で, $\angle$ と $\angle$ の和が2直角より小さければ,

m と n は (l に対して $\angle$, $\angle$ があつた方) 交わる.

4° は「なんでこんなことぞ?」だし, 5° は「もっと簡単に言えない?」という感じだが... Euclid のすゝめはここにある.



$\angle + \angle < 2 \text{ 直角}$