

2学期前半の数学Bでは、これまで学んできたEuclid平面幾何学を、公理的に再構築する(といっても、完璧にそれをやるには時間がまったく足りないので、その根幹にしておく)。

Euclid平面幾何学の公理的構成は、当のEuclidをはじめ、古来多くの大数学者が試みている(Hilbertの『幾何学基礎論』が特に重要)。この授業では、小平邦彦が著書

『幾何のおもしろさ』 岩波書店
で構成した理論展開に従う。

● 公理と定理。

「なぜ？」にこたえる説明を証明というのだった。しかし、その証明のなかに「なぜ？」が生じることもあるだろう。するとそれに対する証明が必要になるだろうが、ではもしその証明のある部分に「なぜ？」とツッコまれてしまったらどうするか。……この連鎖が無限に続いてしまうと、証明を完了できない。それでは困ってしまう。

数学上のあることがらは、それよりも基本的な(この“基本的な”という言葉の意味も難しいが、いまは気分ですます)ことがらをもとに証明される。これを繰り返すと、議論はどんどん、より基本的なことがらへとさかのぼり……これが“終わらないと困るわけだが”……最終的に

「なぜ？」と問われても困るくらい、あたりまえのことに行き着くだろう。そこで、このような“基本的事実”を前もって集めておき、それを議論にかかわる人すべてで共有し、

この“基本的事実”は成立の理由を問うことなく認めよう！
とするのが、Euclidが著書『原論』で提示した態度である。

このように、「その成立の理由を問わず、議論の前提として認める“基本的事実”のことを、公理(axiom)といい、公理全体の集まりを公理系という。そして、公理系を定めてそれをもとに数学の理論を作ることを公理的構成いう。

公理的構成では、公理以外の主張はすべて、公理系から論理的に証明されてはじめて「成立する」「真だ」と認定される。そのような「公理系をもとに真だと論理的に証明された命題」を定理(theorem)という。

まず公理を設定し、そこから論理的推論により定理を積み重ねていくのが、現代数学の枠組みである。

なお、現代数学では公理とは「誰もが認めざるを得ない不朽の真理」ではない。むしろ「ゲームのルール」に近い。ルールは変わってもよい、ただしゲームは別物になる。

← 小平邦彦先生(1915-1997)。3人しかいない日本人フィールズ賞受賞者の1人。数学の本もエッセイもとても深く面白い。これが日本語で読めるのは、日本語を知る者にとって大きな幸せである。

← 『原論』では“基本的事実”として「公理」と「公準」の2種があった。しかし、現代数学の立場では、両者を無理に区別する必要はないとされている。

ダンク上にダンクを築く

← 「ボールに手を触れてはいけない」はどう見ても「人類普遍の真理」ではない。これはサッカーやフットサルなどをプレイしようと合意した人たちだけが守る「ルール」である。バスケットボールやハンドボールなどでは、これと異なる別の「ルール」がある。

● “GEB”のMUパズル.

公理的構築の例として、『ゲーデル・エッシャー・バルハイ』(D. ホフスタッター著)にある, MUパズルを見よう. (ただし, 授業しやすいように, 私がいろいろ表現を変えている.)

ここでは, M, I, U の3種の文字だけからなる文字列のみを, 簡単に「文字列」ということにする. ただし, $\square$ 文字からなる文字列 (空白) も「文字列」とであると規約する.

文字列全体の集合を, 以下のルールに従い, 2つの集合 T, F に分ける. なお, 以下で x, y などとは任意の文字列を指し示すものとする.

0) $MI \in T$.

1) $xI \in T$ ならば $xIU \in T$.

2) $Mx \in T$ ならば $Mxx \in T$.

3) $xIIIIy \in T$ ならば $xUy \in T$.

4) $xUUy \in T$ ならば $xy \in T$.

5) 0) 1) 2) 3) 4) から T の元だと証明できない文字列は, すべて F の元.

たとえば, $MI \in T \xRightarrow{0)} MII \in T \xRightarrow{1)} MIIU \in T$ など.

問1. $MIIIIU \in T$ を示せ.

問2. $MUIUI \in T$ を示せ.

問3. 13文字からなる T の元の例を1つ挙げよ. (もちろん, そんなたいかには T の元が) 存在することの証明も必要です.

問4. $MU \in F$ を示せ.

← 本 本当は, 私は公理的構築のいちばんいい例は:

★ オセロのルールを公理系とすると, 「隅に置かれた石は決してひっくり返らない」はオセロの定理である.

★ 囲碁のルールを公理系とすると, 「二眼ある石は活きている」は囲碁の定理である.

だと思うのです. でも, オセロや囲碁を知らない人もいるからね.

← 集 集合の記法でいきなり書いた方が数学者にはよいのだが, 慣れていないと意味が読み取りにくいこともあるだろう. たとえば 1) は,

I で終わる文字列が T に属するならば, その末尾に U をつけ加えた文字列も T に属する.

と, 日常語を交えて述べることもできる.