2024 年度数学特別セミナー
あみだくじの数え上げと表現論

(Enumeration Relating to Ladder Lotteries and Representation Theory)

述: 有木 進 */ 記: 穂坂 秀昭 †

2026 年 3 月

概要

開成学園では毎年，現役の数学者に講演していただく「数学特別セミナー」を開催しています．2024 年度は，大阪大学名誉教授の有木進先生をお招きし，「あみだくじの数え上げと表現論」というテーマでセミナーをしていただきました．このノートは，その講演の内容をまとめたものです．

なお，脚注はいずれも穂坂が付け足したものです．有木先生にお話していただいた内容は全て本文中に含めています．また，このノートの文責は，誤りも含め，全て穂坂にあります．

目次

* 大阪大学情報科学研究科情報基礎数学専攻 名誉教授

† 開成中学校・高等学校 数学科 教諭

■**おことわり**　セミナー中で人名が登場する際，敬称の表記は次のようにしています．

- 日本人の方に対しては，何らかの敬称が付いています．敬称に「〜先生」「〜さん」が混ざるのは，有木先生との個人的な繋がりなどによるものです．
- 外国人の方はファーストネームで呼ぶことが多く，また学術的な文脈では人名に敬称をつけないことが一般的なので，敬称を付けていません．

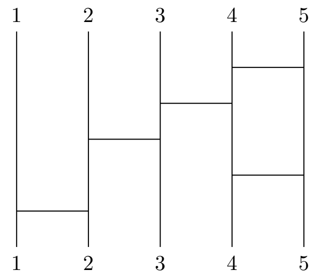
0　今回のセミナーの概要

無関係に見える 2 つの世界が奥の深いところでつながっていることがときどきあります．あみだくじを例に取り上げて，表現論に由来する数学とつながっていることを見ましょう．あみだくじの一番上に 1, 2, . . ., n と書くと一番下はその並べかえ（順列）が現れますね．同じ順列が現れるように（最も少ない本数で）横棒を書く書き方は何通りあるかを考えます．そして得られた数を標準盤と呼ばれる組合せ論的対象の数え上げと比較します．また，あみだくじをいくつかのブロックに分ける「あみだくじの単調減少あみだくじへの分解」を考えて個数を数えます．そして得られた数を半標準盤と呼ばれる組合せ論的対象と比較します．するとこれらの個数に不思議な一致が見られます．1 時間めはこの現象を観察します．2 時間めでは背景にある表現論を解説します．種明かしの鍵となるのは柏原クリスタルと呼ばれる 1990 年代初頭に開発され現在に至るまで発展を続けている理論です．

1　あみだくじ

数学には役に立つのもあり役に立たないのもあるんですけど，ただ，何か計算をして数の一致があったりすると，そこから意外と深いものを見つけてきたりするんですね．一番良く知られているのは Fermat 予想といって，それが全然別の現代数学，楕円曲線とか保型形式とかいうものと結びついたりする．

そこまですごくなくても，素朴に何かを計算して何かと一致すると「おっ，これは何かあるぞ」と思えて，意外と何かあったりする．あみだくじもその一つです．日本人なのであみだくじを棒を並べて描いて，あみだくじとする．みなさんがやるときは，白い紙に棒を並べて，片側にプレゼントを書いてもう片方に人の名前を書いて，両側を隠して横棒を書き足す．これがあみだくじ本来の使い方．数学であみだくじというときは数を書く．上と下に 1, 2, 3, 4, 5 と書いて棒の間に適当に線を入れて「1 が 2 に行って，2 が 3 に行って，4 が 4 に行って，5 が 1 に行く」みたいにする．



ちなみに「あみだくじ」と呼べるのは日本だからです．欧米の本を見ると水道管みたいな感じで，パイプが繋がっていてその間を移動する感じで書かれる．

あみだくじのいいところは，出てくる結果に同じ数が並ばないこと．今の例だと 1 が 2 に，2 が 3 に，3 が 5 に，4 が 4 に，5 が 1 にというように，出てくる 23541 という数の並びが必ず 12345 の並べ換えになっている．こういうのを，数が 5 個あるので，5 次順列という．縦棒の数が 4 本だったら 4 次順列というし，100 本だった 100 次順列という．また，あみだくじの結果出てくる数の並びがたとえば 23541 のとき，「あみだくじが 23541 を実現する」という[*1].

■あみだくじの基本定理　あみだくじについては，次の定理が基本です．

定理 1 [あみだくじの基本定理]**.** n は自然数とする．

(1) どんな n 次順列に対しても，それを実現するあみだくじが存在する．
(2) n 次順列 w を 1 つ固定する．w を実現するあみだくじの横棒の本数は，最低でも $\mathrm{inv}(w)$ 本である．

ここに現れた $\mathrm{inv}(w)$ というのは w の転倒数と呼ばれる数であり，次のように定義される．

定義 2. n 次順列 w を数の並びと見て，左から順に 1 番目は $w(1)$, 2 番目は $w(2)$, …, 最後は $w(n)$ と表す．

$$w = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline w(1) & w(2) & \cdots & w(n) \\ \hline\end{array}$$

このとき $\mathrm{inv}(w)$ を，$i < j$ かつ $w(i) > w(j)$ となる (i, j) の個数と定義する:

$$\mathrm{inv}(w) = \#\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, w(i) > w(j)\}.$$

$i < j$ というのは「j 番目の方が i 番目より右側にある」ということです．i 番目のところには $w(i)$ と書いてあって，j 番目のところには $w(j)$ と書いてある．そうすると今の条件は「左にある $w(i)$ の方がでかい」ということ．転倒数という名前の由来はここにある．「順序は若いけど数の大小が逆転している組」の個数を見ている．

		$w(i)$	$>$	$w(j)$	
		i 番目		j 番目	

これだけだと「いまいち分からんなあ」と思うかもしれないから，例で計算しましょう．どうやって計算するかというと，(i, j) のリストを全部勘定してやればよい．でもそれは大変なのでもう少し頭を使う．

[*1] （知っている人向けの注）専門的な言葉を出さずに済むよう，有木先生は「n 次順列」と「あみだくじ」という言葉をお使いになっています．n 次順列を「n 次対称群 S_n の元」，あみだくじを「S_n の元を隣接互換の積で表示する方法」と読み替えれば，一般的な数学書の表記とぴったり対応します

例 3. 5 次順列 $w = 23541$ を考える．i が 1 のとき，i が 2 のとき，... を順番に考える．

- $i = 1$ の場合，$w = 23541$ の一番左の 2 が $w(i)$．その次に j は i の右側を動く．

$$\begin{array}{rccccc} w = & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ \hline & \uparrow & & & & \\ i\!: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

  ここで，数が $w(1) = 2$ より小さいものを数える．そうすると $i = 1$ の場合，$w(1) = 2$ より小さいのは $w(5) = 1$ しかないから，$j = 5$ の 1 個．
- $i = 2$ の場合．j は i の右を動くから，$w(j)$ で出てくる数は 5, 4, 1 の 3 つ．

$$\begin{array}{rccccc} w = & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ \hline & & \uparrow & & & \\ i\!: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

  $w(2) = 3$ より小さいのは $w(5) = 1$ だけだから，ここでも $j = 5$ の 1 個．
- 今度は $i = 3$ の場合．$w(3) = 5$ よりも右側を探して，5 より小さい数というと 4 と 1 がある．というわけで $j = 4, 5$ の 2 個．
- 最後に $i = 4$ の場合．$w(5) = 1$ は $w(4) = 4$ より小さいから，$j = 5$ の 1 個．
- $i = 5$ に来ると，その右側に何もないから逆転するものもない．

これらを足した $1 + 1 + 2 + 1 + 0 = 5$ が $\mathrm{inv}(w)$．そして，さっき 5 次順列 23541 を実現したあみだくじに出てくる横棒はちょうど 5 本．あみだくじの基本定理によれば，これ以上横棒を減らせない．

もう 1 つの数え方として，j の方を動かすこともできる．

- $j = 1$ だと，j の左側を見ると，左には何もない．だから 0 個，
- $j = 2$ のときは，左の $i = 1$ を見て $w(1)$ が $w(2) = 3$ より大きいかを見る．でもそうなっていないから 0 個．

$$\begin{array}{rccccc} w = & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ \hline & & \uparrow & & & \\ j\!: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

- $j = 3$ のとき，$w(3) = 5$ より左で 5 より大きいものを探すと，ない．0 個．
- $j = 4$ のとき，$w(4) = 4$ より左で 4 より大きいのを探すと 5 がある．1 個．

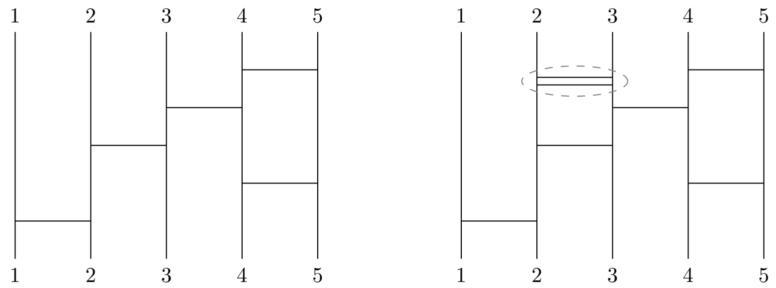
$$\begin{array}{rccccc} w = & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ \hline & & & & \uparrow & \\ j\!: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

- 最後に $j = 5$ のとき，左にある 2, 3, 5, 4 は全部 $w(5) = 1$ より大きいから，$i = 1, 2, 3, 4$ の 4 個．

こっちで計算しても $\mathrm{inv}(w) = 0 + 0 + 0 + 1 + 4 = 5$ となる．

この転倒数というのが大事になります．ただ，基本定理を証明しようとすると大変．

■順列を実現するあみだくじの個数　同じ n 次順列 w を実現するあみだくじは無限にある．それは当たり前ですね．何もないところに横棒を縦に 2 本隣り合わせてくっつけて足しても同じ結果になるからです．

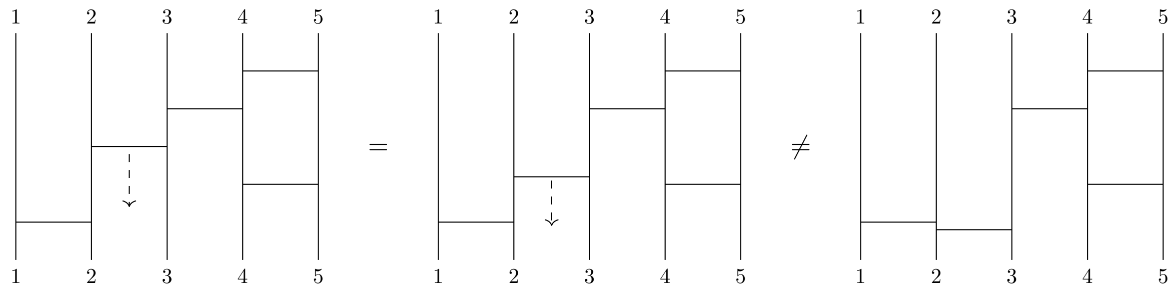


だから，横棒の数が最低限の $\mathrm{inv}(w)$ 本になるあみだくじだけを考えよう．そう制限すると実は有限個にはなるんですけど，1 個とは限らない．その個数を知りたい．

「なんで？」と言われても，個数が知りたいんです．これが理学，数学の活動ですね．理系には理学と工学というのがあって，工学ってのは基本的に社会の問題を解決するためにどうするかを考え，その後に社会にどう実装するか考える．他方で理学というのはちょっと違って「なんでそれが起こるのか」の理屈を知りたい．人によって違いがあるので，どっちがいいって話じゃないです．たとえば iPS 細胞って非常に有名ですよね．iPS 細胞はとても応用がすごくて目の治療とかに役に立つでしょう．その考え方は工学に似ています．iPS 細胞では分化した細胞の 4 種類のファクターを初期化するんですけど，なんでそれを初期化すればいいのかわからない．だけどそういう現象が発見されたので，とりあえずそれを使う．他方で，理学の生物に関する先生はその理屈が知りたいわけです．また昔，下村脩先生がノーベル賞を取りましたけど，人から「なんでこんなことやってるんだ」と言われつつクラゲを集めるうちに面白い現象に当たって，ノーベル賞を取った．

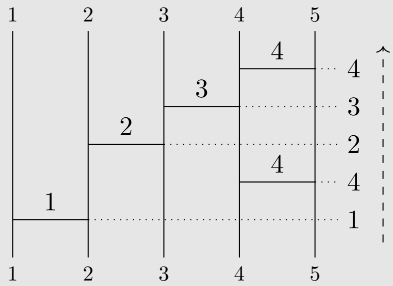
ちなみに理学といっても，後半で説明する表現論というものは，理論物理に応用が利きます．たとえば標準模型のゲージ粒子は表現論で表せる．

さて数学では，「数える」というときに，何を数えるのか正確に定義する．詳しくいうと，何かを数えるとき，まず「等しいとはなにか」を考える．たとえば「横棒の本数を転倒数に限れば，実現するあみだくじは有限個になる」といったけども，棒の高さをちょっとだけずらしても同じあみだくじになる．そういうものを「違う」といっちゃうと，また無限個になっちゃうから，高さは気にしない．だけども，これがずーっと下の方に行って別の横棒を超えると，本当に結果が変わっちゃうから，高さが変わりすぎてもいけない．だから「何を等しいとするか」が大事．



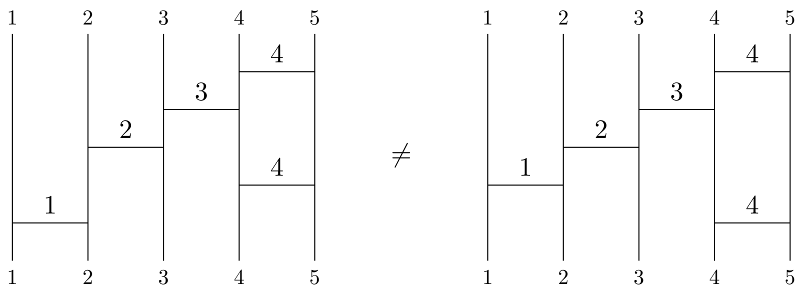
そこでどうするかというと，あみだくじを数列に対応させて表します．4 と 5 を結ぶ横棒には 4，3 と 4 を結ぶ横棒は 3，2 と 3 を結ぶ横棒には 2，1 と 2 を結ぶ横棒には 1 と名前を付け，これを下から読む[*2].

例 4. 次の例だと，14234 が得られる．



定義 5. 棒の数を下から読んだ数列が等しい 2 つのあみだくじを「等しい」と呼ぶことにする．

いまの例でいうと，14234 は 41234 と等しくないということになる．下にある 1 と 4 の横棒の高さをずらしても結果に影響しないことは明らかだけど，数列は違ってくる．だから，これら 2 つは違うとする．



14234　　41234

じゃあ，全部数え上げをしていきましょう．n 次順列 w に対し，$R(w)$ というのを，w を最短本数で実現するあみだくじ全体の集合とする．また $\#R(w)$ と書いたら，集合 $R(w)$ のサイズとする．具体的に $\#R(w)$ を求める．$n=5$ だと大変だから，$n=4$ くらいでやってみましょう．

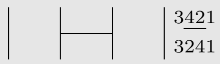
■受講生へ質問　誰か好きな列を言ってください．
——3421

じゃあ 3421 でやってみましょう．

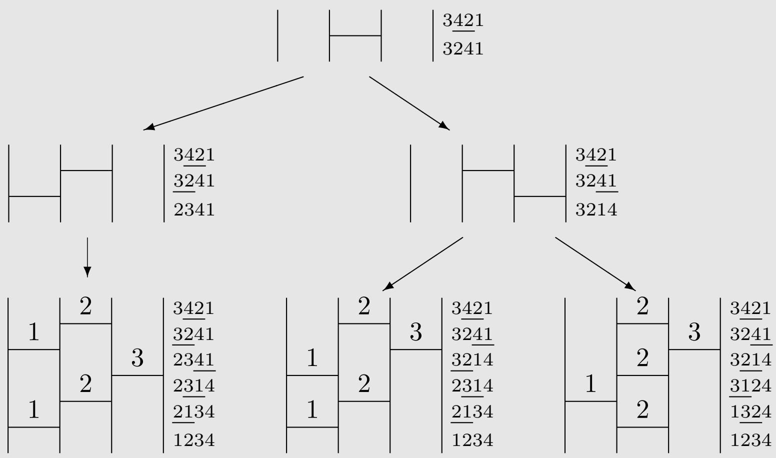
*2 （知っている人向けの注）n 次対称群 S_n の元で i と $i+1$ を入れ替える隣接互換を s_i と表すと，ここで「14234」と書かれている元は「$s_1s_4s_2s_3s_4$」のことです．専門用語を回避しつつ標準的な notation を用いるため，「下から順に読む」と表現なさっています．

例 6. 3421 の中で，隣同士で転倒しているところを注目する．今の場合の $3\underline{42}1$ か $34\underline{21}$ の 2 箇所．ここをひっくり返すと転倒が減っていく．そうやって転倒数を減らしていくと最終的に転倒数が 0 になって，最小の横棒の本数で実現するあみだくじが得られる．

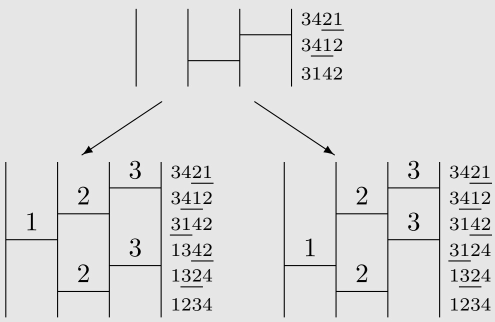
42 を転倒させるやつと 21 を転倒させるやつを分けて考える．まず 42 に転倒があるから，真ん中に横棒を引っ張る．そうすると 3421 が 3241 になる．



横棒を 1 本付け加えた結果，転倒数が減って，その下だけ考えればよくなる．次は $\underline{32}41$ に注目するか $32\underline{41}$ に注目するかの 2 択．左に横棒を付け加えると 2341 になる．そうすると転倒しているのは $23\underline{41}$ だけだから，右から順に 1 本ずつ棒を付け加えていけば 1234 になる．また $32\underline{41}$ に注目して右に横棒を付け加えると 3214 になる．ここはまだ転倒している場所が $\underline{32}14$ と $3\underline{21}4$ の 2 つあるから，分岐する．左に棒を加えると 2314，真ん中に棒を加えると 3124 になる．その先は一直線．

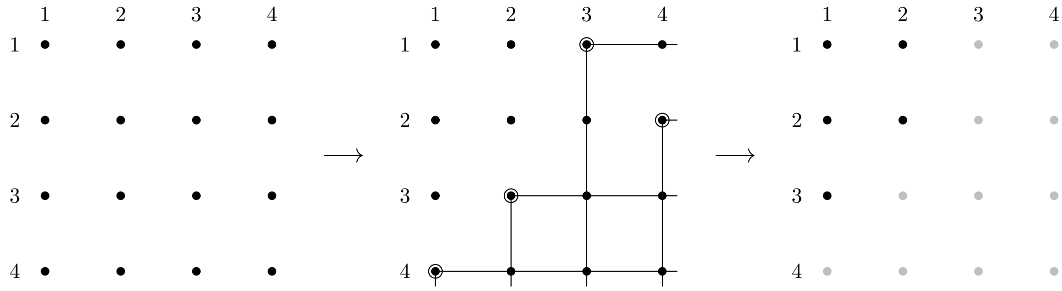


あと，最初に $34\underline{21}$ に注目する場合をやらなきゃいけない．21 をひっくり返すと 3412 になり，転倒しているのが真ん中の $3\underline{41}2$ だけだから，これを返すと 3142 になる．そうするとひっくり返っている場所が 2 箇所あるから分岐する．$\underline{31}42$ を返すと 1342，$31\underline{42}$ を返すと 3124 になって，あとは一直線．



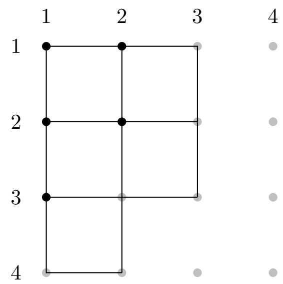
結論としては，$R(3421)$ の元は 5 つある．いま出てきたあみだくじの棒を下から読んでいくと，3421 を実現するあみだくじは $R(3421) = \{12312, 12132, 21232, 23123, 21323\}$ で全てと分かる．

■順列の diagram　さて次にですね，w の Rothe diagram $D(w)$ というものを考えるんです．どうするかというと，いま例えば $w = 3421$ としたとき，「1 番目が 3，2 番目が 4，3 番目が 2，4 番目が 1」というのをマークして，マークされた点より下と右を全部消す．



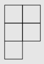
$= D(w)$

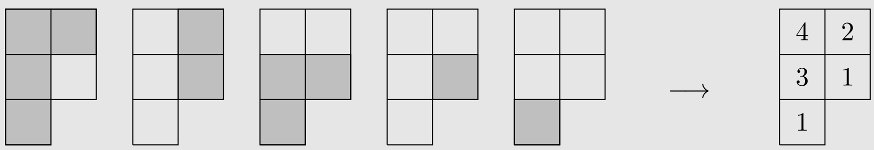
そうすると左上に点が残る．これらの点を左上隅とする正方形のタイリングを作る．この箱の並びが $\lambda(w)$ で，1 行目から順に箱の個数を並べた数列を用いて表す．なお今回はたまたまこれで $\lambda(w)$ ができるが，一般の場合，各行ごとに左に箱を詰め，さらに行が上から長い順になるように行を並べ替えたものを $\lambda(w)$ とする．



$= \lambda(w) = (2, 2, 1)$

こうして $\lambda(w)$ が出来たとき，それぞれの箱に対して，右と下の端っこまで何個あるかを考える．右か下にある箱を集めた図形を hook という．そして hook の長さを数え，$n!$ を全ての hook の長さの積で割った $\dfrac{n!}{\text{hook 長の積}}$ を計算すると自然数になり，しかもあみだくじの個数と一致する．

例 7. 順列 3421 のダイアグラム  だと，左上の箱に対しては hook の長さは 4，右上は 2 で，残りも 3, 1, 1 と埋まる．



長さ 4　長さ 2　長さ 3　長さ 1　長さ 1　hook 長

いまの場合 $\dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 2 \times 3 \times 1 \times 1} = 5$ となる．さっきの $\#R(3421)$ と等しい．

主張. これらの計算結果の一致は偶然ではない.

一番最初, 何か計算してて気付いた奴がいるんだな. Stanley 以来, 周りの MIT の人達が色々やっています. ちょっと高校生には言ってもしょうがないけど, コホモロジー環の中で Schubert 類の積を計算する幾何と組合せ論の世界があって, そういうところから話が来ているんです.

とりあえず, vexillary という言葉の定義をします. vexillary には同値な定義がいくつかあるんですけど, ここでは 2143-avoiding というものを使います.

定義 8. n 次順列 w が vexillary とは, 2143-avoiding, つまり $i < j < k < l$ で $w(j) < w(i) < w(l) < w(k)$ となるものが存在しないときをいう.

vexillary というのは中々普通見ない英単語で, 古代ローマ時代の軍旗が由来.「は？」という感じですよね. これは Lascoux–Schützenberger という, Schubert 計算というものを色々やってた人達が定義しました. 多項式で書ける Schubert 類というものがあって, 2 人はそれが flag Schur function というもので書けるための必要十分条件を与えたんです. そのときに出てきた vexillary という条件が, flag Schur function の flag（旗）から来ている.

さっきの計算結果の一致を, 定理の形で述べます.

定義 9. 自然数の非増加列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$（$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell$）に対し, 箱を 1 行目に λ_1 個, 2 行目に λ_2 個, ... と左詰に並べてできる図形を, λ の Young 図形表示という.

定理 10. w を vexillary な n 次順列とすると,

$$\#R(w) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{x \in \lambda(w)} h(x)}$$

が成り立つ. ここで, 記号は次の通り.

- $\lambda(w)$ は, w の diagram $D(w)$ の行を上から下に長い順に並べ替えて得られる Young 図形.
- $h(x)$ は, $\lambda(w)$ の箱 x に対する hook 長.
- $\prod$ は, 積を取る記号.

あとで説明する「対称群の表現論」という別のものがあって, 実はこの個数が, 表現論の世界では標準盤というものに対応することが分かっている. 個数 $\#R(w)$ は「形が $\lambda(w)$ の標準盤」というものの個数と等しい.

定義 11. λ を Young 図形とする．T が「形が λ の標準盤」とは，$1, 2, \ldots$ を 1 回ずつ使って，λ の箱に

- 各行は左から右へ単調増加
- 各列は上から下へ単調増加

というルールで数を書いたもの．

Young 図形に上から下，左から右に単調増加になるように数を書いたのが標準盤．こっちの方は昔から知られている世界です．みなさんが知らない大昔，上智大学の入試問題になったこともあった．入試問題になったときは「書き込み方の個数を数えなさい」という問題．みなさんはすぐ分かるんじゃないかと思います．

例 12. いま $\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \hline \ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ で考える．標準盤では左上が一番小さいから，ここに 1 を書くしかない．次に，1 と 2 の間は数がないから，2 は 1 から離れたところに書けなくて，2 は 1 のすぐ右か下になる．

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 < & 2 \\ \hline \ & \ \\ \hline \ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \ \\ \wedge & \\ 2 & \ \\ \hline \ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

ここまで来ると，この後地道にやってもいいんだけど，もう少し頭を使う．

- 12 を横に埋めると，下の残りで左上は 3 に決まっているわけですね．あとは 4 と 5 がどっちに入るかで 2 個．
- 12 を縦に埋めると，右の 2 個と左の 1 個は離れてるから，3, 4, 5 のどれが一番下に入るかを決めると残りの入り方が決まる．これで 3 個．

これで合わせて 5 個．$\#R(3421)$ と同じになったでしょう．

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

この手の話は，もう少し classical な表現論の世界で知られている．公式

$$\frac{n!}{\displaystyle\prod_{x \in \lambda} h(x)} = \text{形が } \lambda \text{ の標準盤の個数}$$

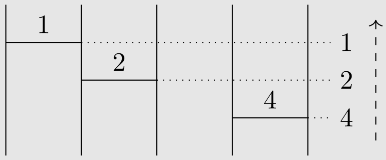
を Frame–Robinson–Thrall の hook length formula という．この値は，実は対称群の既約表現というものの次元になっている．なお，hook という概念を最初に発見したのは中山正先生[*3]です．戦前の話．

[*3] Tadasi Nakayama, "On some modular properties of irreducible representations of a symmetric group I", *Japanese Journal of Mathematics* **17** (1941), 165–184 の §1, p. 167 で定義されています．

2 あみだくじの単調減少あみだくじへの分解

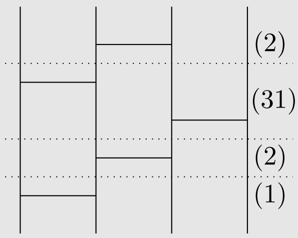
ここまででも「はあ」という感じなんだけど，実はもうちょっとあります．この先がこの話の若干オリジナルなところです．あみだくじを見たとき，横棒の高さが左から右に単調に減少しているあみだくじを「単調減少あみだくじ」という．ただし，横棒がないものも単調減少あみだくじと呼ぶことにする．

例 13. 次のあみだくじは，横棒を下から読んだ数列が 421 となるから，単調減少あみだくじ．



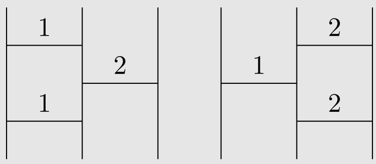
自然数 d を 1 つ決めて，あみだくじを d 個の単調減少あみだくじに分解することを考える．

例 14. $d = 4$ の場合，たとえば 12312 というあみだくじは，(1)(2)(31)(2) と分けると 1 個 1 個が単調減少．1 個 1 個くくった部分が図の部分と対応してて，単調減少になっている．

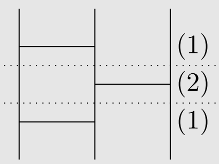


別の例も出しましょう．

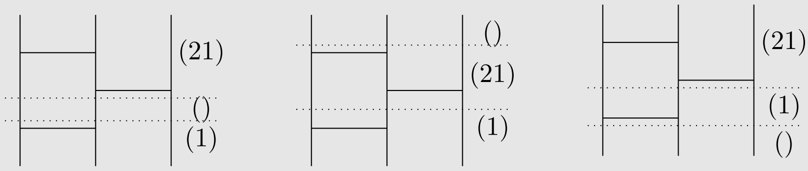
例 15. $w = 321$ の場合．このとき，実は $R(w) = \{121, 212\}$ になる．図にしますと次のもの．



このとき $d = 3$ で分解を考える．まず 121 を考えると，普通に 1 個ずつに分けるものがある．



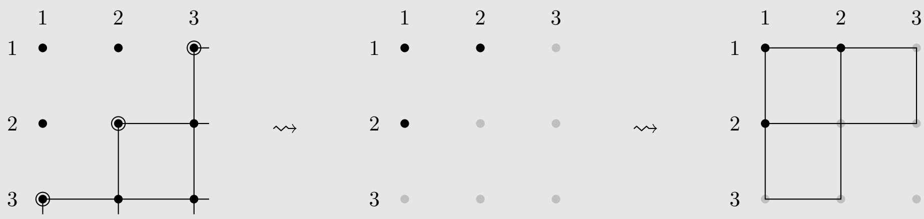
ここで定義が大事になってくる．横棒が 1 本もない空っぽのやつも単調減少だから，$w = 121$ を (1) と () と (21) に分けてもよい．同じように 121 を (1)(21)() や ()(1)(21) と分けてもよい．



左右をひっくり返した 212 でも同じことができる．結局この $w = 321$ の例では，w を実現するあみだくじの単調減少あみだくじへの分解は 8 個ある．

ここで，さっきは $n!$ を hook 長の積で割っていたけど，いま $n!$ を「$\lambda(w)$ の i 行 j 列にある箱に $d + j - i$ を書き込み，それら全ての積をとったもの」に変える．それを hook 長の積で割ると，単調減少あみだくじへの分解の方法と同じ個数が出てくる．プログラムでも書いて計算してみたらどうでしょう？

例 16. $w = 321$ の場合．ダイアグラムを書くと次のようになるから，$\lambda(w) = D(w) = (2, 1)$.



$\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ の箱に数を詰めると $\begin{array}{|c|c|}\hline d & d+1 \\ \hline d-1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ で，箱の中身の積 $(d-1)d(d+1)$ を hook 長の積 3 で割る．$d = 3$ の場合 $\dfrac{2 \times 3 \times 4}{3} = 8$ となって，さっき計算した単調減少あみだくじへの分解の方法の数と一致する．

主張. この個数の一致は偶然ではない．

例 17. $w = 3421$ の場合は，$\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ に $\begin{array}{|c|c|}\hline d & d+1 \\ \hline d-1 & d \\ \hline d-2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ と数を詰める．hook 長の積は $4 \times 2 \times 3 \times 1 \times 1 = 24$ で，箱の中身の積は $(d-2)(d-1)d^2(d+1)$．割り算した $\dfrac{(d-2)(d-1)d^2(d+1)}{4 \times 2 \times 3 \times 1 \times 1}$ は必ず自然数になって，単調減少あみだくじへの分解の個数と一致する．たとえば $d = 4$ だと $\dfrac{2 \times 3 \times 4 \times 4 \times 5}{4 \times 2 \times 3 \times 1 \times 1} = 20$ 個.

いま計算した式は Weyl の次元公式と呼ばれている．背景には表現論があって，ある既約指標で書かれる．

3　群の表現

さっきちょっと言ったけども，Frame–Robinson–Thrall の hook length formula は，対称群 S_n と呼ばれるものの既約表現の次元公式に関連して理解されている．それがどういうわけだかあみだくじに関係するというのが，比較的最近，1970 年代か 1980 年代かに分かったこと．それから

$$\mathbb{B}_d(w) = \{w \text{ を実現するあみだくじを } d \text{ 個の単調減少あみだくじへ分解する方法}\}$$

とすると，w が vexillary な場合の $\#\mathbb{B}_d(w)$ の公式は，一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$（またはユニタリ群 $U(d)$）というものの既約多項式表現の次元を与える Weyl の次元公式から来ている．

群とは何かというと，対称性を記述する数学概念．定義を書きましょう．

定義 18. 集合 G が群とは，2 項演算

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ \cup & & \cup \\ (a,b) & \mapsto & ab \end{array}$$

が与えられていて（すなわち 2 つの元 a, b が与えられたら，それに対して掛け算という 1 個の元 ab が与えられていて），次の 3 つの条件を満たすことをいう．

(1)（結合法則）$a, b, c \in G$ に対して，$(ab)c = a(bc)$.
(2)（単位元の存在）$e \in G$ という特別な要素があって，$ae = ea = a$.
(3)（逆元の存在）各 $a \in G$ に対して，$a^{-1} \in G$ が存在して $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

高校生になると行列という例を知ってくるように，掛け算の順序が違うと一般には答えが違うんです．そこで，さらに全ての元で $ab = ba$ が成り立つときは，ab の代わりに $a + b$ と書き，a^{-1} の代わりに $-a$ と書き，e の代わりに 0 と書く．このとき上の式は

(1) $a + b = b + a$
(2) $a + 0 = 0 + a = a$
(3) $a + (-a) = (-a) + a = 0$

という，当たり前のことになる．こういうものを群という．

ちなみに国が高校の指導要領で「どれだけの期間にどれだけ教えなさい」という制限をかけるんですけど，「行列と複素平面を両方教えると大変だ」というので 10 年毎に「行列をやめて複素平面にする」「複素平面をやめて行列にする」というのを繰り返してる．大学 1 年生に数学を教えるとき，指導要領が変わる毎に複素平面を知らない人がいるときは複素平面のプリントを用意して，みたいなことをしてた．僕なんかの世代は行列を習った世代．2×2 行列とかをやってた．

対称性がどういう感じで出てくるかという例を，いくつか紹介します．

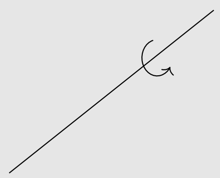
例 19. 2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の解は $x=-1\pm\sqrt{2}i$．ここで

- $-1\pm\sqrt{2}i$ を複素共役 $-1\mp\sqrt{2}i$ に入れ替える操作（複素共役）
- $-1\pm\sqrt{2}i$ を $-1\pm\sqrt{2}i$ のままにする何もしない操作（恒等写像）

を合わせた $G=\{$ 恒等写像, 複素共役 $\}$ は群になる．複素共役の逆元は複素共役．これは Galois 群というものの一番簡単な例．

例 20. 位置ベクトルをある軸に関して回転する操作を考える．すると回転全体は，群の条件をみたす．

- 0° 回転が何もしない回転になる．
- 60° 回転の逆元は -60° 回転というように，反時計回りの回転の逆元は同じ角度の時計回り回転．
- たとえば 30° 回転して 60° 回転したら 90° 回転になり，60° 回転して 30° 回転しても同じ回転になるから，交換法則が成り立っている．



力学を学ぶと，運動方程式というのが微分方程式で書かれるから，微分方程式もよく出てきます．

例 21. 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+a\dfrac{dx}{dt}+bx=0$ の解の全体を考える．
いま $G=\mathbb{R}$（平行移動の全体）を考えると，これは群．

- たとえば 3 移動して 5 移動すると 8 移動する，というように二項演算が定義されている．
- 3 移動して 5 移動するのと 5 移動して 3 移動するのは同じ．
- また何も移動しない 0 移動というのがある．
- 5 移動することの逆は -5 移動．右への移動の逆は左への移動．

ここで $dt=d(t+t_0)$ だから，時間の平行移動 $t\mapsto t+t_0$ $(t_0\in\mathbb{R})$ で微分方程式自体は変わらない．よって G により微分方程式は変わらないので，G は解全体を保つ．
たとえば具体的にやると，

(1) $(a,b)=(3,2)$ のとき，$\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}+2x=0$ の解は $x=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$ $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$ という形をしている．ここで $t\mapsto t+t_0$ と変えると

$$x\mapsto c_1e^{-(t+t_0)}+c_2e^{-2(t+t_0)}=(c_1e^{-t_0})e^{-t}+(c_2e^{-2t_0})e^{-2t}$$

で，これも $\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}+2x=0$ の解．行列という言葉を知っていると，係数が

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1e^{-t_0} \\ c_2e^{-2t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t_0} & 0 \\ 0 & e^{-2t_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

と変化している．

(2) $(a,b)=(0,1)$ のとき．$\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0$ の解は，$x=c_1\sin t+c_2\cos t$．$t\mapsto t+t_0$ とすると，三角関数の加法定理を使って

$$\begin{aligned} x &\mapsto c_1\sin(t+t_0)+c_2\cos(t+t_0) \\ &= c_1(\sin t\cos t_0+\cos t\sin t_0)+c_2(\cos t\cos t_0-\sin t\sin t_0) \\ &= (c_1\cos t_0-c_2\sin t_0)\sin t+(c_1\sin t_0+c_2\cos t_0)\cos t \end{aligned}$$

となる．これも $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0$ の解．微分方程式が変わらないことが，解の対称性になっている．

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1\cos t_0-c_2\sin t_0 \\ c_1\sin t_0+c_2\cos t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

のように係数が変化している．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \{\text{可逆な } 2\times 2 \text{ 行列}\} \\ \cup & & \cup \\ t_0 & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0 \end{pmatrix} \end{array}$$

で，これは行列を知ってるとなじみのある回転．

こういうものから，群の表現というものが定義されます．ちなみに私がやってるのは，モジュラー表現というものです．

定義 22. G を群とするとき，写像

$$\begin{array}{ccc} G & \to & \{\text{可逆な } n\times n \text{ 次行列}\} \\ \cup & & \cup \\ g & \mapsto & \rho(g) \end{array}$$

が $g,h\in G$ に対して $\rho(gh)=\rho(g)\rho(h)$ を満たすとき，対 $(\rho,\mathbb{C}^n)$ を G の n 次元表現と呼び，ρ を考えた $\mathbb{C}^n$ を n 次元 G 加群と呼ぶ．ただし，$\mathbb{C}^n$ は n 次元のベクトル空間:

$$\mathbb{C}^n=\left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mid c_1,\dots,c_n\in\mathbb{C} \right\}.$$

ここに現れた ρ は「ロー」というギリシャ文字．数学ではアルファベットだけじゃなくてギリシャ文字もよく使う．たまに日本語の文字を使う努力をしようとする人もいないわけではない．

> **■質問**　表現を定義するとき，「単位元を単位元に写す」ってのは書かないんですか？
> ――それはいい質問ですね．実は可逆性から自動的にでてきます．数学科の 3 年生では最初の方の講義でそういうことをやります．証明は難しくありません．

例 23.

$$\begin{array}{ccc} G=\mathbb{R} & \to & \{2\text{ 次の逆行列を持つ行列 }\} \\ \cup & & \cup \\ t_0 & \mapsto & \rho(t_0)=\begin{pmatrix}\cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0\end{pmatrix} \end{array}$$

とすると，$(\rho,\mathbb{C}^2)$ は G の表現．ρ を考えた $\mathbb{C}^2$ は G 加群．

以降 d を自然数として，可逆な d 次正方行列全体のなす群 $G = \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ のときを考える．数学的には reductive group ですね．

有限の群だったら考えなくていいことだけど，$\mathbb{R}$ とかだと連続関数とか自然な写像じゃないと中々上手くいかないから，行列 $\rho(g)$ の各成分が g_{ij} の多項式になるものを考えることが多い．ただし $g = (g_{ij})$ で，g_{ij} は行列 g の成分．

また物理の言葉は表現論で書かれている．物理の方だとコンパクト群というものが考えられて，関連する色々な規則が見つけられてきた．それらを数学者が一般化した．

- 弱い相互作用，強い相互作用に出てくる群は $SU(2)$, $SU(3)$ である．力を媒介するゲージボソンは随伴表現 $(\mathrm{Ad},\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{g}$ の中に住んでいる．これらの表現論は，ユニタリ・トリックというもので多項式表現と同じになる．
- ここでは有限次元の表現しか考えてないけど，波動関数が住む空間というのは無限次元になるので，そういうところにはユニタリ表現論というものがある．本格的にその一般論を考え始めたのは Harish-Chandra[*4]という人．インドの人かな．物理の人がはじめたけど，段々数学者がやるようになった．
- 角運動量の合成から出てくる Clebsch–Gordan 係数の一般化である Littlewood–Richardson 規則．この 2 人は数学者．

ちなみに Littlewood–Richarson の Littlewood[*5]はイギリスの数学者で，師匠も Littlewood[*6]という名前の数学者．師匠の方は Hardy の共同研究者で，Hardy は Ramanujan を見つけてきた人．インドからいきなり手紙が来て，Hardy がパッと見ると不思議な式が沢山書いてある．それを読んで「なんじゃらほい」と思うわけ．当時のケンブリッジは優雅で，午前中数学やったら午後はテニスやるとか，自由なんだよ．それで夕方帰ってきて Hardy と Littlewood で式を見て，「こんな不思議な公式は普通の人には作れない」となって，インドから Ramanujan を連れてきた．

[*4] Harish-Chandra はインド出身の数学者．名前にハイフンが入っている，1 人の人物です．
[*5] Dudley Ernest Littlewood (1903–1979)
[*6] John Edensor Littlewood (1885–1977)

4　柏原クリスタル

今のは昔の話なんですけど，ここからは 30 年くらい前の話．柏原先生って人がいます．元々京都の数理解析研究所というところに，佐藤幹夫先生のもとに佐藤スクールというのがありました．佐藤先生というのは数学をやるんだけど，一旦高校の先生やって，佐藤の超函数 hyperfunction というのを見つけて，いきなり数学者になった人．その佐藤先生は修士時代に朝永振一郎先生というノーベル物理学賞を取った先生のもとにいて，元々数学だけじゃなく物理もやってた．だから，数理解析研究所での研究も物理に寄っていた．そういう中で三輪先生，神保先生という統計力学のモデルをやっている先生がお弟子さんとして色々計算すると，何か知らないけど表現論がちらほら出てくる．そこから柏原先生が柏原クリスタルというものを発見して，というような話になります．

$\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ の多項式表現は柏原クリスタルという組合せ論的構造で統制できる．これは 1990 年代初頭の話です．もう四半世紀経ちましたね．最初にクリスタルグラフの論文[*7] を書いたときの共著者は上智大学の中島俊樹さんという人で，中島先生はこの前ようやく 60 歳の還暦研究集会をやった，まだまだ現役の方です．そういう時代の話です．

しかもその結果，$\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ に限らず，いわゆる簡約群という群に対しても Littlewood–Richardson 規則を一般化できた．いま紹介した中島さんと柏原先生の定理です．柏原先生自身は柏原クリスタルで色々論文を書かれて，色々なところで使われている．さっきいった Schubert 計算だけでなく Peter Littelmann という人の仕事など，本当に色々ある．

■柏原クリスタルの定義　柏原クリスタルの定義くらいはやりましょうか．群はいま $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ だけに限る．

ものの本によっては，柏原クリスタルの代数的定義というのがあるんだけど，本質的にはグラフ理論なので，グラフ理論で書く．有向グラフ (V, E) を考える．V は頂点集合で E は辺集合．向きのついた辺は始点と終点で指定される[*8]ので，$E \subset V \times V$．つまり頂点 i から頂点 j に向かう辺 $i \to j$ があるとき $(i, j) \in E$ と書く．

定義 24. (V, E) が（seminormal な）柏原クリスタルとは，有向グラフ (V, E) に各頂点の重み $\mathrm{wt}\colon V \to P = \mathbb{Z}^d$ と辺の色 $c\colon E \to \{1, 2, \dots, d-1\}$ が与えられていて，以下を満たすもの．

(1) $u \xrightarrow{i} v$ ならば，$\mathrm{wt}(v) = \mathrm{wt}(u) + (0, \dots, 0, \overset{i}{\overbrace{-1}}, \overset{i+1}{\overbrace{+1}}, 0, \dots, 0)$．つまり $\mathrm{wt}(u)$ の i 番目を 1 減らして $i+1$ 番目を 1 増やす．

(2) i と $v \in V$ に対し，$u \xrightarrow{i} v$ は高々 1 つ．

(3) j と $v \in V$ に対し，$v \xrightarrow{j} u$ は高々 1 つ．

(4) 各 $u \in V$ に対し，$u_{\max} \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} u \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} u_{\min}$ という有向辺の有限列があって，$v \xrightarrow{i} u_{\max}$ や $u_{\min} \xrightarrow{i} v$ が存在しない．（V が有限集合のときはあまり気にしなくてもよい．）

(5) $u_{\max} \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} u \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} u_{\min}$ という列で u より左の長さを $\varepsilon_i(u)$, u より右の長さを $\varphi_i(u)$ とすると $\varphi_i(u) - \varepsilon_i(u) = \mathrm{wt}(u)_i - \mathrm{wt}(u)_{i+1}$ が成り立つ．

[*7] Masaki Kashiwara and Toshiki Nakashima, “Crystal graphs for representations of the q-analogue of classical Lie algebras”, *Journal of Algebra* **165** (1994), 295–345.

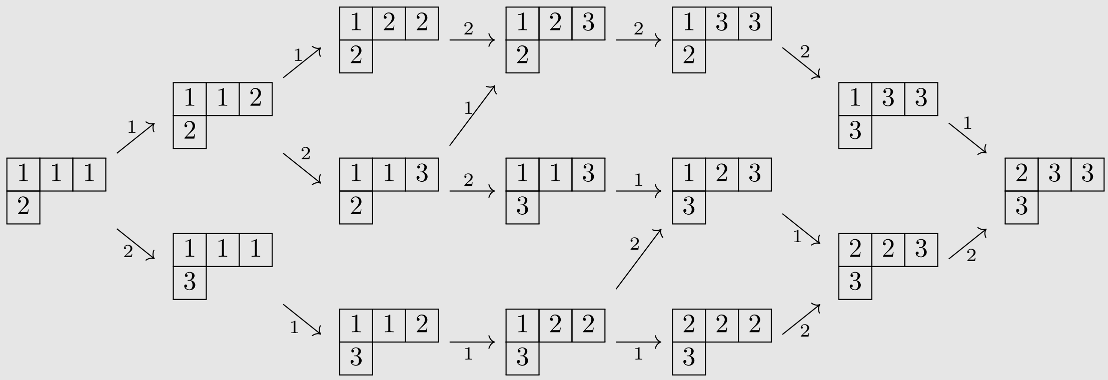
[*8] ここでは多重辺を考えていません．

$\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ のクリスタルを記述するには，半標準盤というものを用います．

定義 25. Young 図形の箱に数 1, 2, ..., d を「行方向には単調非減少，列方向には単調増加」という規則で書き込んで得られる盤を半標準盤という．1 以上 d 以下の数が書き込まれた，形が λ の半標準盤全体の集合を，$\mathrm{SST}_d(\lambda)$ と書く．また半標準盤 T に対し「T を下の行から上の行に向けて，各行を左から右に読んだとき，現れる順に箱の中身を並べた数列」を盤 T の row reading word という．

これがクリスタルの例です．

例 26. GL_3 の場合，表現 $V\left(\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\end{smallmatrix}\right)$ に対応するクリスタルグラフは次のようになる．



どうやって作るかは次の通り．

- 頂点集合は，形が $\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\end{smallmatrix}$ の半標準盤全体の集合 $\mathrm{SST}_3\left(\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\end{smallmatrix}\right)$ とする．
- 盤 T とそれぞれの数 i に対して，次のようにして矢印を引くかどうかを判定する．
  (1) T の row reading word の中にある i, $i+1$ 以外の数を全て消す．
  (2)「$i+1$, i」という並びが出てきたら消す．
  (3) もし最後まで i が残ったら，その中で一番後ろの i に対応する T の箱を $i+1$ に書き換えたものが T' として，$T \xrightarrow{i} T'$ を引く．

また $\mathrm{wt}(T)$ は，T の中に現れる 1 の個数, 2 の個数, ... を並べてできる数列と定める．

背景の説明をします．お話だから何となく聞いていてください．$\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ の表現論には Cartan–Weyl の最高ウェイト表現というのがあって，Young 図形 λ に対して $V(\lambda)$ と書かれる $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ の既約表現が対応する．ポイントは，何か既約表現という（行列式とか使って）代数的に表現論で定義されたものに対し「絶対温度 0° への結晶化」というスローガンがあって，そういうものからクリスタルという組合せ論的な構造が得られる．それが柏原先生が発見なさったものです．いま書いたやつは $V\left(\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\end{smallmatrix}\right)$ に対応する柏原クリスタル．$\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ だけじゃなくてもっと一般の簡約代数群でもできます．

■EGMS 対応　あみだくじの話に戻ると，問は「なんで単調減少あみだくじへの分解の個数に $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ の表現論由来の数が現れるのか」ということ．答えは Jennifer Morse と Anne Schilling によって与えられた．二人とも女性で，Morse は University of Virginia の教授で，Schilling は UC Davis の教授．彼女たちは

$$\mathbb{B}_d(w) := \{w \text{ を実現するあみだくじの単調減少あみだくじへの分解 }\}$$

という集合に柏原クリスタルの構造を入れ[*9]，さらに柏原クリスタルの同型，すなわち単なるグラフとしての同型だけじゃなくて色とか重みとかそういうのも含めた同型

$$\mathbb{B}_d(w) \simeq \coprod_{\lambda} B_d(w) \times \mathrm{SST}_d(\lambda)$$

を作った．$\mathrm{SST}_d(\lambda)$ は $V(\lambda)$ に対応するクリスタル．$B_d(w)$ は $\mathrm{SST}(w^{-1}, \lambda)$ という，形が λ の半標準盤のうち，row reading word が w^{-1} を実現するあみだくじになるようなもの全体の集合．どちらも具体的に分かる．

この同型は，Edelman–Greene 対応というものを利用した具体的なアルゴリズムで書かれる．もしみなさんが Knuth という人の “The Art of Computer Programming” という本を持っているなら，そこに Robinson–Schensted 対応というのが書いてある[*10]．文字列があったときに，その中の単調増加な部分を数える対応があるんですけど，その Robinson–Schensted 対応をちょっと変形したバージョンが Edelman–Greene 対応．それを使った対応なので Edelman–Greene–Morse–Schilling 対応と呼ぶ[*11]．

[*9] 参考文献の Morse–Schilling [4]，Chapter 3 に書いてあります．

[*10] 5.1.4 節 “Tableaux and Involutions”

[*11] EGMS 対応については時間の都合で講義中に詳しく紹介されませんでしたが，日本語で読める文献が多くないので，今回のセミナーのレジュメに基づき，対応の作り方についてここで簡単に紹介します．

まず Robinson–Schensted (RS) 対応（の簡単なバージョン）は，n 次順列 w に対して同じ形の標準盤のペアを作る操作です．「標準盤の行（すなわち，左から順に小さい数が箱に入った行）に対して数 i を挿入 (insert) する」という操作を，

- もし行の中に i より大きい数がなければ，i を右端に付け加える
- 行の中に i より大きい数があるときは「i を超える最小の数」をはじき出し (bump)，その位置に i を置く

と定めます．そして盤に対し「1 行目に数を挿入し，はじき出される数があるときは，それを次の行へ挿入する」という操作を考え，順列の先頭から順番に行っていきます．たとえば $w = 32514$ の場合，空の盤に対して 3 と 2 を順番に insert すると

$$\emptyset \leftarrow 3 \qquad \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array} \leftarrow 2 \qquad \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline\end{array} \atop \leftarrow 3 \qquad \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}$$

となります．2 を 1 行目に insert する際，1 行目には 2 より大きい数 3 が元々いるので，この 3 が bump されて下の行に insert されます．続けて 5, 1, 4 を insert していくと

$$\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} \leftarrow 5 \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 5\\\hline 3 \\\cline{1-1}\end{array} \leftarrow 1 \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5\\\hline 3 \\\cline{1-1}\end{array} \leftarrow 2 \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5\\\hline 2 \\\cline{1-1}\end{array} \leftarrow 3 \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5\\\hline 2 \\\cline{1-1} 3 \\\cline{1-1}\end{array} \leftarrow 4 \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4\\\hline 2 \\\cline{1-1} 3 \\\cline{1-1}\end{array} \leftarrow 5 \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4\\\hline 2 & 5\\\hline 3 \\\cline{1-1}\end{array}$$

となります．n 次順列を insert した結果，できあがるのは標準盤になります．これを $P(w)$ と書きます．また $P(w)$ と同じ形の標準盤で，$P(w)$ の箱がくっついていく順に数を書き込んだもの（recording tableau）を $Q(w)$ とします．そうすると

$$w \mapsto (P(w), Q(w)) = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4\\\hline 2 & 5\\\hline 3 \\\cline{1-1}\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\\hline 2 & 5\\\hline 4 \\\cline{1-1}\end{array} \right)$$

という対応が得られます．$Q(w)$ の方を見ると「最後に加わった箱がどこか」が分かり，また箱の位置に応じて「どのように bump されてきたか」が分かるので，この対応は逆がたどれます．

Edelman–Greene 対応は，この RS 対応を少し変形したものです．$R(w)$ の元（n 次対称群の元 $w \in S_n$ の，隣接互換による最短表示を表す word）を RS 対応と同じように insert していくのですが，「i と $i+1$ が隣接している行に i を挿入する場合，その行には何も手を付けず，次の行に $i+1$ を挿入する」という例外を設けます．こうしてできる insertion の手続きを

この対応から，w を実現するあみだくじの個数が分かります．一般の w に対して

$$\#R(w) = \sum_{\lambda} \#\mathrm{SST}(w^{-1}, \lambda) \times \frac{n!}{\prod_{x \in \lambda} h(x)}$$

という公式が得られる[*12]．Richard Stanley の最初の論文から λ の取り得る範囲は

（Edelman と Greene は元々 Coxeter–Knuth insertion と呼んでいますが），Morse–Schilling にならって Edelman–Greene (EG) insertion と呼びましょう．たとえば $n=3$ で $w=321$ の場合，$R(w)$ の元 121 と 212 をそれぞれ EG insertion すると

121: $\emptyset \leftarrow 1\ \begin{ytableau}1\end{ytableau} \leftarrow 2\ \begin{ytableau}1&2\end{ytableau} \leftarrow 1\ \begin{ytableau}1&2\end{ytableau} \leftarrow 2\ \begin{ytableau}1&2\\2\end{ytableau}$

212: $\emptyset \leftarrow 2\ \begin{ytableau}2\end{ytableau} \leftarrow 1\ \begin{ytableau}1\end{ytableau} \leftarrow 2\ \begin{ytableau}1\\2\end{ytableau} \leftarrow 2\ \begin{ytableau}1\\2\end{ytableau} \leftarrow 2\ \begin{ytableau}1&2\\2\end{ytableau}$

となります．212 を挿入していく過程は RS 対応と同じですが，121 の挿入では，最後に 1 を挿入する際に変更されたルールを適用しています．RS 対応と同様にして recording tableau をペアにすることで，

$$121 \mapsto \left(\begin{ytableau}1&2\\2\end{ytableau}\,,\ \begin{ytableau}1&2\\3\end{ytableau}\right), \qquad 212 \mapsto \left(\begin{ytableau}1&2\\2\end{ytableau}\,,\ \begin{ytableau}1&3\\2\end{ytableau}\right)$$

という対応が得られます．これも，付け加わった箱から「どういう bumping を経てきたか」を逆に追えるので，逆写像が作れるようになっています．なお RS 対応に加える修正がいささか人工的に見えますが「row reading word が同じ n 次順列を表すようにしたい」というモチベーションと対称群の組紐関係式 $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ を踏まえると，こういう修正をすべきだと納得できます．

そして EGMS 対応は，あみだくじの単調減少分解 $w = w^{(d)} w^{(d-1)} \cdots w^{(1)}$ に対し，次のように構成されます．

- $w^{(k)}$ を左右逆に並べたものを $w^{(-k)}$ として，空の tableau に対し，$w^{(-1)}$, $w^{(-2)}$, ..., $w^{(-d)}$ を順番に Edelman-Greene insertion する
- recording tableau の方は「$w^{(-k)}$ の insertion で新たに付け加わる箱すべてに k を書き込む」という方法で作る

たとえば 5 次順列 $w = 35214$ を考え，$R(w)$ の元として 421232 を取ります．これを 421, 2, 32 と分割して順に $w^{(3)}$, $w^{(2)}$, $w^{(1)}$ と書くと，$w^{(-1)}$, $w^{(-2)}$, $w^{(-3)}$ はそれぞれ 23, 2, 124 となります．順番に EG insertion すると，次のようになります．

$$\emptyset \leftarrow 2\ \begin{ytableau}2\end{ytableau} \leftarrow 3\ \begin{ytableau}2&3\end{ytableau} \leftarrow 2\ \begin{ytableau}2&3\\3\end{ytableau} \leftarrow 1\ \begin{ytableau}1&3\\2\\3\end{ytableau} \leftarrow 2\ \begin{ytableau}1&2\\2&3\\3\end{ytableau} \leftarrow 4\ \begin{ytableau}1&2&4\\2&3\\3\end{ytableau}$$

この盤の row reading word 323124 は，先頭の 323 を 232 に取り替えると 232124 となるので，確かに $R(w^{-1})$ の元です．そして「$w^{(-k)}$ の EG insertion で付け加わる箱に k を書き込む」という方法で作る recording tableau をペアにすると，

$$(23, 2, 124) \mapsto \left(\begin{ytableau}1&2&4\\2&3\\3\end{ytableau}\,,\ \begin{ytableau}1&1&3\\2&3\\3\end{ytableau}\right)$$

という対応ができます．

「同じ数をいくつも書き込んでどうして recording tableau になるんだ」と思うかもしれませんが，この対応はきちんと逆がたどれるようにできています．各 $w^{(k)}$ が単調減少であるから $w^{(-k)}$ は単調増加になっています．このおかげで，$w^{(-k)}$ の insertion において「下の行から上の行に向かって，左から順に箱が付け加わっていく」ことが保証されます．ですから recording tableau に同じ数 k が複数書かれていても，上の行から順に，かつ右から順に箱を外していくことで，EG insertion の逆がたどれます．

このようにして，$\mathbb{B}_d(w)$ の元に $\mathrm{SST}(w^{-1}, \lambda) \times \mathrm{SST}_d(\lambda)$ の元である半標準盤のペアを対応させる EGMS 対応ができ，その逆写像が作れることも分かります．

[*12] この部分について，少々補っておきます．柏原クリスタルの同型

$$\mathbb{B}_d(w) \simeq \coprod_{\lambda} B_d(w) \times \mathrm{SST}_d(\lambda)$$

は，集合としての 1 : 1 対応も与えているので，両辺の集合は同じ個数の元を持ちます．ここで w を実現するあみだくじを表す数列に対し「数を 1 個ずつバラバラにする」という分解を考えると，$R(w)$ は $\mathbb{B}_d(w)$ の部分集合に埋め込めます．そして EGMS 対応の作り方を思い出すと，$R(w)$ の元を「1 個ずつバラバラにする」という操作は $d = \mathrm{inv}(w)$ に対応していて，この分け方の場合は recording tableau に同じ数が現れません．すなわち，$R(w) \subset \mathbb{B}_d(w)$ に EGMS 対応を制限すると右辺の $\mathrm{SST}_{\mathrm{inv}(w)}(\lambda)$

- Lehmer code[*13]を大きい順に並び替えて得られる diagram $\lambda(w)$
- $w(1),\ldots,w(n)$ の j 番目より前で j 番目より大きいものの個数を $r_j(w)$ とするとき，$\mu_i(w) = \#\{j \mid r_j(w) \geq i\}$ で定まる列 $\mu(w)$

を用いて $\lambda(w) \trianglelefteq \lambda \trianglelefteq \mu(w)$ と具体的に書ける[*14].

重要な事実があって，$\lambda(w) = \mu(w)$ と w が vexillary であることは同値．なので w が vexillary のときは $\sum$ が 1 項だけになって，しかも係数について $\#\mathrm{SST}(w^{-1},\lambda) = 1$ になるので，

$$\#R(w) = \#\mathrm{SST}(w^{-1},\lambda(w)) \times \frac{n!}{\prod_{x\in\lambda(w)} h(x)} = \frac{n!}{\prod_{x\in\lambda(w)} h(x)}$$

という，$n!$ を hook 長で割った公式になる．

こういうようなお話を紹介しました．興味がある人は個別に質問してください．

■セミナー後のできごと　本セミナーが実施されたのは 2024 年 10 月ですが，そこから今日にいたるまで，セミナーの内容に関連する出来事がありました．

- 柏原先生が，代数解析と柏原クリスタルの業績で 2025 年度 Abel 賞を受賞なさいました．
- Jennifer Morse が，ICM 2026（国際数学者会議）の招待講演者となりました．

が（半ではない）標準盤の集合 $\mathrm{ST}(\lambda)$ に化け

$$R(w) \simeq \coprod_{\lambda} B_d(w) \times \mathrm{ST}(\lambda)$$

という集合の 1 : 1 対応が得られます．この両辺で元の個数を勘定すると

$$\#R(w) = \sum_{\lambda} \#\mathrm{SST}(w^{-1},\lambda) \times \#\mathrm{ST}(\lambda)$$

となります．そして hook length formula を代入すると，

$$\#R(w) = \sum_{\lambda} \#\mathrm{SST}(w^{-1},\lambda) \times \frac{n!}{\prod_{x\in\lambda(w)} h(x)}$$

という結論が得られます．

[*13] w の転倒数を求める際，i 番目より右にあって i 番目より小さい数の個数を数えて足しました．ここで数えた個々の数 $c_i(w) := \#\{j \mid j > i \text{ かつ } w(j) < w(i)\}$ を並べた列 $c(w) := \big(c_1(w), c_2(w), \ldots, c_n(w)\big)$ が w の Lehmer code です．

[*14] ここに現れた記号 $\trianglelefteq$ は，dominance order と呼ばれるものです．Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ と $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ に対し，全ての k で $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \leq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$ が成り立つとき，$\lambda \trianglelefteq \mu$ と書きます．

講演後の質疑応答

■質問　柏原クリスタルの同型ってどういう意味の同型ですか？

——柏原クリスタル $(B_1, \mathrm{wt}_1, c_1)$ と $(B_2, \mathrm{wt}_2, c_2)$ が同型とは, 有向グラフの同型 $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)\colon B_1 \to B_2$, すなわち $\varphi_0\colon V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ と $\varphi_1\colon E_1 \xrightarrow{\sim} E_2$ で $\varphi_1\big((i,j)\big) = \big(\varphi_0(i), \varphi_0(j)\big)$ を満たすものであって，次の図式が可換になるものが存在することです.

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[rr, "\varphi_0", "\sim"'] \arrow[dr, "\mathrm{wt}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & V_2 \arrow[dl, "\mathrm{wt}"] \\
& \mathbb{Z}^d &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "\varphi_1", "\sim"'] \arrow[dr, "c"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & E_2 \arrow[dl, "c"] \\
& \{1, 2, \ldots, d-1\} &
\end{tikzcd}
$$

■質問　クリスタルグラフとは，さっき挙がった例のようなものですか？

——そうです．出たのがもう 7 年前になるけど，Bump–Schilling の教科書に組合せ論的なアルゴリズムが書いてあります．Bump という人は，数論の人で，保型形式とかやってて，crystal base と Tokuyama formula に興味を持って，Schilling と本を書いた．ちなみにもう少し言うと，上智大の中筋先生が Bump のお弟子さんです.

■質問　この辺の話を詳しく知りたければ何を読めばいいですか？

——参考文献に挙げた Bump–Schilling か, あるいは Hong and Kang, “Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases” という本.

ただ一つだけ注意しなきゃいけないことがあって，柏原先生は途中で用語を変えるんですよ．最初のあたりからしばらくするとちょっとズレる．それから先は固定するんだけど．最初の論文では semiregular と書いてある．次にフランス数学会から出た “Bases cristallines des groupes quantiques” では seminormal になっている．Bump–Schilling の本でも seminormal って書いてある.

話はズレるけど，regular と normal って情報科学と数学じゃ訳が違うんですよ．それも混乱する理由. 数学だと normal が正規，regular が正則．だけど情報科学では regular を正規と呼んでいる．計算機科学を少しかじった人なら regular expression というのを見たことあると思うけど，あれは正規表現．昔は，最初に日本の計算機科学が始まった頃は，数学出身者と情報科学出身者が集まって色々やってたんですね. 数学出身者は一生懸命「正則表現」と呼んでたんだけど，残念ながら淘汰されました.

■質問　前半の $\#R(w)$ の公式をお話なさったとき，flag manifold の Schubert cell のお話をされていたと思うんですけど，そこの話をちょっと聞かせてください.

——いま $G = \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ ですけど，この中に parabolic subgroup P があって，G/P が Grassmann 多様体になる．この中に（上半三角と下半三角のどっちで取るのがいいのか分からないけど）Borel 部分群 B というのがあって，G/B は旗多様体．そうすると 1 年生の線型代数でやる行基本変形と列基本変形の話ですけど，GL_d だと $G = \coprod BwB$ という Bruhat 分解があって，旗多様体が $G/B = \coprod BwB/B$ と分解する. BwB/B を Schubert cell といい，その閉包を $X(w)$ とする．$H^*(G/B, \mathbb{Z})$ における積の組合せ論に対応するモデルとして，divided power で書かれる，Lascoux–Schützenberger の Schubert 多項式というのが

ある．こういう Schubert class の積を組合わせ論的に計算できる．すると

$$\mathfrak{S}_u\mathfrak{S}_v = \sum d_{uv}^w \mathfrak{S}_w$$

のようになって，d_{uv}^w を求めると，組合せ論的幾何学の世界では intersection が分かる．ただ，この係数は難しくてよく分かっていない．

昔から幾何の人達は，特別な分かるやつを一生懸命やっているわけです．それでその 1 つの場合として $\mathfrak{S}_u$ が flagged Schur function になっている場合がある．flagged Schur function は分かりやすい多項式なので，掛け算とかが分かる．

Schur function というのは semistandard tableau の weight 母関数の表示を持ちます．

■質問　Schubert cell の包含関係も組合せ論的に書けるんですか？
—はい，Bruhat 順序で書けます．

■質問　柏原クリスタルは元々は量子群で $q \to 0$ とした極限で出てくる話ですけど，今日の話って別段そこにいる必要はなくて，量子群知らなくても分かりますよね？
——その通りです．元々見つけたときは量子群の基底を $q \to 0$ へ crystalize するという文脈があったんですけど，そこから柏原クリスタルという純粋な組合せ論的概念にしてしまえる．そうすると色んなとこに応用が広がっていく．今のあみだくじみたいなのとかもあるし，数理物理に出てくる XXZ 模型の相関関数の計算にも使える．その辺は三輪先生，神保先生や尾角さんの仕事かな．Bump–Schilling の書いた本の話で，保型形式の Tokuyama Formula にも柏原クリスタルが出てくる．あと Schubert calculus ね．元々は有限次元ですけど，無限次元の affine Grassmannian にも出てくる．

■質問　様々な群の表現に柏原クリスタルが顔を出すということでしょうか？
——そうです．様々な分野で，1 つの使いやすい用語として定着しています．

■質問　Edelman–Greene は柏原クリスタルが見つかるよりも前に，組合せ論的な動機で対応を見つけてたわけですよね．それが柏原クリスタルが定義された後で Morse–Schilling が「ちょうどクリスタルになってる」と見つけた．あまりに上手くいっているように思うんですが，何故なんでしょう？
——実は George Lusztig という人が Ringel の結果を使って標準基底というのを見つけたときに，谷崎先生が Lusztig の本の書評で「本質的なものはそんなにたくさんあるわけではなく，たどる道筋は全く違っても，結局同じところに到達するのが優れた数学者なのだろうな」とおっしゃってます[*15]．いろいろな人が感じているけど，数学の本質的な対象というものは実は多くないのかもしれないので同じ物を色んな方向から見て上手くいってるのかも．知りませんけどね．

これに限ったことじゃなくて，「神は理系である」という話があるじゃないですか．たとえば円錐曲線が典型的な例ですけども，紀元前に数学者が円錐を切って Euclid 幾何で遊んでいたものが，1000 年の時を超えて，地動説を証明する円錐曲線として現れるわけですよね．万有引力の法則と Newton の運動方程式を合わせると，円錐曲線が出てくる．そういう風に，数学というのは本来現実とは関係なくやっているはずなのに，不思議なことに繋がっていく．そういうのは色んなところに書いてありますね．そういうのの一環じゃないですかね．僕も答えは知りませんけど．何でか知らないけど，柏原クリスタルというのを作ると，色々なところに現れてくる．

参考文献

[1] A. Björner and F. Brenti, Combinatorics of Coxeter Groups, GTM 231, *Springer*, 2005.

[2] D. Bump and A. Schilling, Crystal Bases: Representations and Combinatorics, *World Scientific*, 2017.

[3] R. Stanley, On the Number of Reduced Decompositions of Elements of Coxeter Groups, *Europ. J. Combinatorics* (1984), 359–372.

[4] J. Morse and A. Schilling, Crystal approach to affine Schubert calculus, *Int. Math. Res. Notices* (2016), 2239–2294.

[5] A. Schilling, Richard Stanley through a crystal lens and from a random angle, *in : The Mathematical Legacy of Richard P. Stanley*, AMS 2016, 287–299. (arXiv:1405.2966.)

[6] 有木進『コクセター群とあみだくじ』（共立出版，2026 年後半刊行予定）

[*15] 「数学」（岩波書店） **47** (2) (2001), 103–106